Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 6 — 1951. — No. 5

Zagreb 1951

Izdaje Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske

Editio Societatis mathematicorum et physicorum Croatiae

SADRŽAJ

VAŽNO UPOZORENJE!

PRETPLATNICIMA GLASNIKA

Da bi se vrlo povećani materijalni izdaci za štampanje Glasnika barem djelomice pokrili, prema zaključku godišnje skupštine Društva matematičara i fizičara povećana je za godinu 1951. godišnja pretplata na Glasnik odnosno članarina Društva od 120.— na 180.— dinara. Taj se iznos može uplatiti i dvokratno, po 90.— dinara.

Za godinu 1952. godišnja pretplata na Glasnik odnosno članarina za redovne članove Društva iznosi 240 dinara, a za članove pomagače 180 dinara. I taj se iznos može platiti dvokratno.

Molimo sve članove, odnosno pretplatnike, da uzmu u obzir da su materijalne poteškoće oko izdavanja Glasnika vrlo velike, pa da što prije pošalju članarinu odnosno pretplatu.

Oni pak članovi, odnosno pretplatnici, koji imaju zaostatke u pretplati, neka te zaostatke što prije uplate, jer će im u protivnom slučaju dostava Glasnika biti obustavljena.

Redovno dostavljanje pretplate može znatno olakšati posao administraciji Glasnika i uštediti Društvu izdatke na pismene opomene radi zaostale pretplate. Pošaljite zato još danas pretplatu čekovnom uplatnicom br. 401-9533139 na Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske, Zagreb, ili je uplatite u administraciji Glasnika, Hrv. prir. društvo, Zagreb, Ilica 16/III.

REDAKCIJA GLASNIKA
MATEMATIČKO-FIZIČKOG I ASTRONOMSKOG

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Serija II. | Zagreb 1951 | T. 6 / No. 5

O JEDNOJ JEDNAKOSTI MEĐU INTEGRALIMA

Dragiša Mitrović, Zagreb

Neka je $f(z)$ meromorfna funkcija u kružnici $C \equiv |z| \leqq R$. Polazeći od integrala

$$I = \int_C \frac{\log f(z)}{z} \, dz$$

dolazi se do Jensen-ove formule[1])

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \, d\varphi + \sum_1^n \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_1^p \log \frac{|b_k|}{R} \, ^{2)},$$

gdje su a_j i b_k nule odnosno polovi funkcije $f(z)$ za koje je $|a_j| < R$, $|b_k| < R$[3]).

Generalizaciju ove formule dao je R. Nevanlinna[4]).

Ako mjesto kružnice $|z| \leqq R$ uzmemo polovicu kružnog vijenca

$$\varrho \leqq |z| \leqq R,$$

omeđenog krivuljom C, u kome je funkcija $f(z)$ holomorfna (njene nule $a_\nu = r_\nu e^{i\Theta_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, su sve prvog reda) i pođemo od integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{z^2} \right) \log f(z) \, dz$$

dolazi se do Carleman-ove formule[5])

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\frac{1}{r_\nu} - \frac{r_\nu}{R^2} \right) \sin\Theta_\nu = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \log\left|f\left(Re^{i\Theta}\right)\right| \sin\Theta \, d\Theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_\varrho^R \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2} \right) \log|f(x)\, f(-x)| \, dx + A,$$

gdje A zavisi od $f(z)$ i ostaje ograničeno kod $R \to \infty$.

Uzimajući sada mjesto kružnice i polovice kružnog vijenca polovicu kružnice u čijoj je nutrinji funkcija $f(z)$ meromorfna i polazeći od integrala

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C H(z) \log f(z) \, dz$$

gdje je $H(z)$ ma koja funkcija holomorfna u pomenutoj oblasti i realna na osi x, dolazimo do slijedećih rezultata:

TEOREM. — *Zadana je funkcija $f(z)$ meromorfna u polukružnici*

$$|z| \leq R, \ \mathcal{I}m\, z \geq 0.$$

Neka su a_ν njene nule reda α_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, koje leže u pomenutoj oblasti, a polovi reda β_μ, koji također leže u istoj oblasti, neka su b_μ $(\mu = 1, 2, \ldots p)$. Neka je $H(z)$ derivacija funkcije $h(z)$ holomorfne u nutrinji polukružnice i realne na osi x. Pretpostavlja se, da $f(z)$ nema ni nula ni polova na krivulji koja obuhvata oblast. Tada je:

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^R [H(x)\log|f(x)| + H(-x)\log|f(-x)|]\,dx -$$

$$- \mathcal{I}m\left\{\frac{R}{2\pi}\int_0^\pi e^{i\Theta} H\left(Re^{i\Theta}\right)\log f\left(Re^{i\Theta}\right)d\Theta\right\} =$$

$$= \mathcal{I}m\left\{\sum_1^n \alpha_\nu h(a_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu h(b_\mu)\right\};$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^R [H(x)\arg f(x) + H(-x)\arg f(-x)]\,dx +$$

$$+ \mathcal{R}e\left\{\frac{R}{2\pi}\int_0^\pi e^{i\Theta} H\left(Re^{i\Theta}\right)\log f\left(Re^{i\Theta}\right)d\Theta\right\} =$$

$$= (N-P)\,h(R) - \mathcal{R}e\left\{\sum_1^n \alpha_\nu h(a_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu h(b_\mu)\right\},$$

gdje su N i P ukupni brojevi nula odnosno polova funkcije $f(z)$ u pomenutoj oblasti (pri tome se nula i pol uzimaju onoliko puta koliki je njihov red).

Teorem se dokazuje pomoću slijedeće dvije leme:

LEMA 1. — *Zadane su funkcije $f(z)$ i $g(z)$. Funkcija $f(z)$ je meromorfna u nutrinji jednostavne zatvorene krivulje C, a $g(z)$ je holomorfna. Pretpostavlja se, da je funkcija $g(z)$ neprekidna na krivulji C i da na njoj $f(z)$ nema ni nula ni polova. Ako su a_ν nule reda α_ν a b_μ polovi reda β_μ funkcije $f(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots n,\ \mu = 1, 2, \ldots p)$ unutar C, tada postoji formula*)*

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_1^n \alpha_\nu g(a_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu g(b_\mu).$$

*) Uporedi sa (3), str. 111.

Ako je specijalno $g(z) = 1$, dobijamo važnu formulu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_1^n \alpha_\nu - \sum_1^p \beta_\mu = N - P. \tag{4}$$

DOKAZ. — Funkciju $f(z)$ možemo napisati u obliku

$$f(z) = \frac{\prod_1^n (z-a_\nu)^{\alpha_\nu} u(z)}{\prod_1^p (z-b_\mu)^{\beta_\mu} v(z)}, \tag{5}$$

gdje su $u(z)$ i $v(z)$ funkcije koje ne utječu, u oblasti D, na broj nula i polova funkcije $f(z)$.

Logaritmiranjem funkcije $f(z)$ dobijamo

$$\log f(z) = \sum_1^n \alpha_\nu \log(z-a_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu (z-b_\mu) + \log u(z) - \log v(z). \tag{6}$$

Deriviranjem jednakosti (6) dobijamo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^n \frac{\alpha_\nu}{z-a_\nu} - \sum_1^p \frac{\beta_\mu}{z-b_\mu} + \frac{u'(z)}{u(z)} - \frac{v'(z)}{v(z)}. \tag{7}$$

Kad pomnožimo (7) sa $g(z) \neq 0$ u oblasti D i integriramo tako dobivenu jednakost, imamo

$$\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_C \sum_1^n g(z)\frac{\alpha_\nu}{z-a_\nu}\,dz - \tag{8}$$

$$- \int_C \sum_1^p g(z)\frac{\beta_\mu}{z-b_\mu}\,dz + \int_C g(z)\frac{u'(z)}{u(z)}\,dz - \int_C g(z)\frac{v'(z)}{v(z)}\,dz.$$

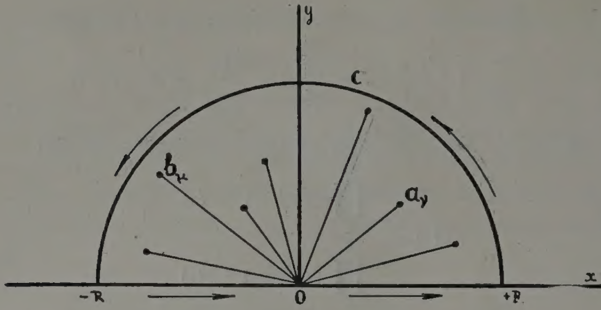
Prva dva integrala na desnoj strani izračunavaju se pomoću teorema ostatka (residuum-a). Ostaci podintegralnih funkcija za polove a_ν i b_μ su respektivno

$$\alpha_\nu g(a_\nu) \quad \text{i} \quad \beta_\mu g(b_\mu).$$

Posljednja dva integrala na desnoj strani, prema fundamentalnom Cauchy-evom teoremu, jednaka su nuli. Dakle,

$$\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\sum_1^n \alpha_\nu g(a_\nu) - 2\pi i \sum_1^p \beta_\mu g(b_\mu) \tag{9}$$

odakle proizilazi (3). Integraciju smo uzimali i uzimat ćemo uvijek u direktnom smislu.



LEMA 2. — *Priraštaj (varijacija) multiformne funkcije* $\log f(z)$, *kad točka* z, *počev od jedne date točke, opiše jednostavnu zatvorenu krivulju* C *u direktnom smislu, jednak je* $2\pi i (N—P)$, t. j.*)

$$\left\{\log f(z)\right\}_C = 2\pi i\,(N-P). \tag{9₁}$$

DOKAZ. — Promatrajmo formulu

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \tag{10}$$

gdje su z_0 i z_1 početna i završna vrijednost varijable z pri opisivanju krivulje C. Pošto je podintegralna funkcija derivacija od $\log f(z)$, to je

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\left[\log f(z_1)-\log f(z_0)\right].$$

Sa druge strane je

$$\log f(z_0)=\log|f(z_0)|+i\varphi_0$$
$$\log f(z_1)=\log|f(z_0)|+i(\varphi_0+2\lambda\pi)$$

gdje je λ neki pozitivan ili negativan cio broj koga treba odrediti. Oduzimanjem dobijamo:

$$\left\{\log f(z)\right\}_C=\log f(z_1)-\log f(z_0)=2\lambda\pi i$$

pa je

$$N-P=\lambda. \tag{11}$$

Dakle,

$$\left\{\log f(z)\right\}_C = 2\pi i\,(N-P).$$

U cilju dokaza postavljenog teorema, nađimo

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C H(z)\log f(z)\,dz. \tag{12}$$

---

*) Uporedi sa (3), str. 112.

Tada je, polazeći iz točke $z=R$ u direktnom smislu

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} H\left(Re^{i\theta}\right)\log f\left(Re^{i\theta}\right) Rie^{i\theta}\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{0} H(x)\log f(x)\,dx+\frac{1}{2\pi i}\int_0^R H(x)\log f(x)\,dx,$$

ili
$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_0^R [H(x)\log f(x)+H(-x)\log f(-x)]\,dx+$$

$$+\frac{R}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{i\theta} H\left(Re^{i\theta}\right)\log f\left(Re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Pošto je

$$\log f(x)=\log|f(x)|+i\arg f(x)$$
$$\log f(-x)=\log|f(-x)|+i\arg f(-x),$$

biti će, poslije jednostavnog množenja izrazâ u uglatoj zagradi i razdvajanja na realni i imaginarni dio,

(13)
$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_0^R [H(x)\log|f(x)|+H(-x)\log|f(-x)|]\,dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^R [H(x)\arg f(x)+H(-x)\arg f(-x)]\,dx+$$

$$+\frac{R}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{i\theta} H\left(Re^{i\theta}\right)\log f\left(Re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Pomoću djelomične integracije

$$u=\log f(z) \qquad dv=H(z)\,dz$$
$$du=\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \qquad v=h(z)$$

dobijamo iz (12):

(14)
$$I=\left\{\frac{1}{2\pi i}h(z)\log f(z)\right\}_C-\frac{1}{2\pi i}\int_C h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

gdje vitičasta zagrada označava varijaciju funkcije

$$\frac{1}{2\pi i}h(z)\log f(z)$$

duž C sa početnom točkom $z=R$.

Na osnovu leme 2, bit će

$$\left\{\frac{1}{2\pi i} h(z) \log f(z)\right\}_C = \frac{1}{2\pi i} h(R) [\log |f(z)| + (N-P) 2\pi i] - \tag{15}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} h(R) \log |f(z)| = (N-P) h(R).$$

Na osnovu (15) i leme 1, poslije (14):

$$I = (N-P) h(R) - \left[\sum_1^n \alpha_\nu h(a_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu h(b_\mu)\right]. \tag{16}$$

Pošto su lijeve strane od (13) i (16) jednake, to moraju biti jednake i desne. Iz te jednakosti, metodom identifikacije realnih i imaginarnih dijelova, dobijamo jednakosti (1) i (2), t. j. ono što je trebalo dokazati.

Ako stavimo da je

$$A = \mathcal{R}e\left\{e^{i\Theta} H\left(Re^{i\Theta}\right)\right\}$$

$$B = \mathcal{J}m\left\{e^{i\Theta} H\left(Re^{i\Theta}\right)\right\},$$

tada je

$$e^{i\Theta} H\left(Re^{i\Theta}\right) \log f\left(Re^{i\Theta}\right) = A \log\left|f\left(Re^{i\Theta}\right)\right| - B \arg f\left(Re^{i\Theta}\right) +$$

$$+ i\left[A \arg f\left(Re^{i\Theta}\right) + B \log\left|f\left(Re^{i\Theta}\right)\right|\right].$$

Sada jednakosti (1) i (2) možemo pisati u obliku

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^R [H(x) \log |f(x)| + H(-x) \log |f(-x)|]\, dx - \tag{17}$$

$$- \frac{R}{2\pi}\int_0^\pi \left[A \arg f\left(Re^{i\Theta}\right) + B \log\left|f\left(Re^{i\Theta}\right)\right|\right] d\Theta =$$

$$= \mathcal{J}m\left\{\sum_1^n \alpha_\nu h(a_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu h(b_\mu)\right\},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^R [H(x) \arg f(x) + H(-x) \arg f(-x)]\, dx + \tag{18}$$

$$+ \frac{R}{2\pi}\int_0^\pi \left[A \log\left|f\left(Re^{i\Theta}\right)\right| - B \arg f\left(Re^{i\Theta}\right)\right] d\Theta = (N-P) h(R) -$$

$$- \mathcal{R}e\left\{\sum_1^n \alpha_\nu h(a_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu h(b_\mu)\right\}.$$

KOROLAR 1. — *Zadana je funkcija $f(z)$ holomorfna u polukružnici*

$$|z| \leq R, \ \mathcal{J}m\, z \geq 0.$$

Neka su a_ν njene nule reda α_ν, koje leže u spomenutoj oblasti ($\nu = 1, 2, \ldots n$). Neka je $H(z)$ derivacija funkcije $h(z)$ holomorfne u nutrinji polukružnice i realne na osi x. Tada formule (17) i (18) vrijede i dalje, samo se u njima anuliraju članovi

$$P \ \text{ i } \ \sum_1^p \beta_\mu h(b_\mu).$$

KOROLAR 2. — *Zadana je funkcija $f(z)$ holomorfna u polukružnici*

$$|z| \leq R, \ \mathcal{J}m\, z \geq 0.$$

Neka su a_ν njene nule prvog reda, koje leže u spomenutoj oblasti ($\nu = 1, 2, \ldots n$). Neka je $H(z)$ derivacija funkcije $h(z)$ holomorfne u nutrinji polukružnice i realne na osi x. Pretpostavlja se, da je funkcija $H(x)$ parna. Tada je

$$(19) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^R H(x)\log|f(x)f(-x)|\,dx - \\ -\frac{R}{2\pi}\int_0^\pi \left[A\arg f\left(Re^{i\Theta}\right) + B\log\left|f\left(Re^{i\Theta}\right)\right|\right]d\Theta = \mathcal{J}m\left\{\sum_1^n h(a_\nu)\right\},$$

$$(20) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^R H(x)\left[\arg f(x) + \arg f(-x)\right]dx + \\ \frac{R}{2\pi}\int_0^\pi \left[A\log\left|f\left(Re^{i\Theta}\right)\right| - B\arg f\left(Re^{i\Theta}\right)\right]d\Theta = N\cdot h(R) - \mathcal{R}e\left\{\sum_1^n h(a_\nu)\right\}.$$

(Primljeno 26. II. 1951.)

L i t e r a t u r a:

[1]) J. L. Jensen: Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. Acta math. 22 (1899).

[2]) G. Valiron: Théorie des fonctions, str. 423, (1948).

[3]) E. Goursat: Cours d'analyse, t. II, str. 115, (1942).

[4]) R. Nevanlinna: Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes (1929).
R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen, str. 155 (1936). Vidi nap. 2, str. 424.

[5]) Čebotarev-Meuman: Trudi matematičeskogo instituta Steklova, 29, str. 153 (1949).

SUR UNE ÉGALITÉ D'INTÉGRALES

par

Dragiša Mitrović, Zagreb

Résumé

THÉORÈME. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le demi-cercle*

$$|z| \leqq R, \ \mathcal{J}m\, z \geqq 0.$$

Soient a_ν les zéros d'ordre α_ν, b_μ les pôles d'ordre β_μ de $f(z)$ à l'intérieur de ce demi-cercle; $\nu = 1, 2, \ldots n$ et $\mu = 1, 2, \ldots p$. On suppose qu'il n'y ait ni de zéros ni de pôles de $f(z)$ sur le contour. Si $H(z)$ est la dérivée de la fonction $h(z)$ holomorphe dans le domaine considéré et réelle sur l'axe des x, on a (1) et (2), N et P y désignant respectivement le nombre des zéros et le nombre des pôles (chacun d'eux étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité).

Pour démontrer le théorème on utilise les formules (3) et (9_1) que nous supposons connues, l'accolade y désignant l'accroissement de la fonction $\log f(z)$ lorsque z parcourt un contour fermé dans le sens direct.

En résolvant (12), on obtient (13). D'autre part, en intégrant (12) par parties on a (14). En utilisant (3) et (9_1), la relation (14) devient (16).

Enfin, l'égalité (13) $=$ (16) donne les égalités (1) et (2).

O KONVERGENCIJI NIZA (x_n), ČIJI SU ČLANOVI DEFINISANI JEDNAČINOM $x_{n+1} = f(x_n)$

Mahmud Bajraktarević, Sarajevo

Na nizove čiji su članovi definisani jednačinom $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, nailazi se često, ali se rijetko nailazi na opšte metode ispitivanja uslova konvergencije i divergencije tih nizova. Tako se na pr. u knjizi N. M. Gjunter i R. O. Kuzmin *Sbornik zadač po vissej matematike, Ogiz — Goztehizdat,* 1947, str. 72, u vezi sa nizovima ove vrste, daje samo kratko uputstvo, kako će se u svakom pojedinom slučaju, posmatranjem grafika funkcija $u = f(x)$ i $v = x$, izvesti zaključak o ponašanju datog niza. Međutim, mogu se dati kriteriji za konvergenciju i divergenciju posmatranog niza u znatno opštijem obliku, kako ćemo pokazati u ovom članku.

Dat je niz (x_n) čiji su članovi definisani jednačinom

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots, \tag{1}$$

gdje je x_0 konačan i određen broj, $f(x)$ određena, jednoznačna i neprekidna funkcija argumenta x u posmatranom segmentu $[a-b, a+b]$, i gdje su a i b dva određena broja.

I. *Niz* (x_n) *je konvergentan i* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *ako je za* $a - b \leqq x \leqq a + b$

1^0 $|f(x) - a| < |x - a|$ za $x \neq a$;

2^0 $f(a) = a \neq x_0$ (slijedi iz 1^0 i neprekidnosti od $f(x)$), (slučaj $x_0 = a$ je trivijalan, jer je tada $x_n = a$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$);

3^0 $a - b \leqq x_0 \leqq a + b$.

D o k a z. — Iz 1^0 slijedi, da je

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - a| < |x_n - a|. \tag{2}$$

Iz (2) slijedi, da se niz (x_n), u opštem slučaju, može rastaviti u dva dijela: prvi dio je monotono rastući niz čiji su svi članovi manji od a; drugi dio je monotono opadajući niz čiji su svi članovi

veći od a. Oba su ova niza ograničeni i monotoni, te su prema tome i konvergentni. Ako sa ξ i η označimo njihove granične vrijednosti, tada je

(3) $$\lim_{n\to\infty} \inf. x_n = \xi \leq a \leq \lim_{n\to\infty} \sup. x_n = \eta .$$

Uopšte mogu nastupiti ovi slučajevi:

1) $\xi < a < \eta$, $\frac{1}{2}(\xi+\eta) \gtrless a$,

2) $a = \frac{1}{2}(\xi+\eta)$ uz $\xi < a < \eta$ ili uz $\xi = \eta = a$.

3) Niz (x_n) se sastoji samo od jednog dijela, koji predstavlja monotoni i ograničeni niz.

I. 1. Pretpostavimo, da je $2a - \xi < \eta$ i da je $\xi < a < \eta$.

Izaberimo $\varepsilon > 0$ takvo, da je $2a - \xi + \varepsilon < k < \eta$, što je uvijek moguće. Tada je moguće naći dovoljno velik cio broj $n_0(\varepsilon) > 0$ takav, da je
$$a - \xi < a - x_{n_0} < a - \xi + \varepsilon.$$

Iz (2) slijedi, da je tada za sve vrijednosti indeksa $n > n_0(\varepsilon)$
$$|x_n - a| < a - x_{n_0} < a - \xi + \varepsilon < k - a < \eta - a ,$$
što znači, da tačka η nije tačka nagomilavanja.

Uz pretpostavku da je $a - \xi > \eta - a$ i $\xi < a < \eta$ došli bismo sličnim putem do zaključka, da ξ nije tačka nagomilavanja. Prema tome mora biti $a - \xi = \eta - a$.

I. 2. Pretpostavimo, da je
$$a = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad \text{i} \quad \xi < a < \eta .$$

Neka je $\varepsilon_1 > 0$ jedan stalan, proizvoljno malen, unaprijed izabran broj. Uvijek je moguće naći dovoljno velik broj $n_0(\varepsilon_1) > 0$ takav, da je za beskonačno mnogo vrijednosti indeksa $n > n_0(\varepsilon_1)$

(4) $$|\xi - x_n| < \varepsilon_1 .$$

Među ovim vrijednostima indeksa n ima ih beskonačno mnogo takvih, koje zadovoljavaju pored nejednačine (4) i nejednačine $\eta - \varepsilon_1 < f(x_n) < \eta + \varepsilon_1$, koje se zbog $\eta = 2a - \xi$ mogu napisati i ovako:

(5) $$2a - \xi - \varepsilon_1 < f(x_n) < 2a - \xi + \varepsilon_1 .$$

Neka je sada unaprijed dat jedan određen po volji malen broj $\delta > 0$. Pošto je funkcija $f(x)$ neprekidna, moguće je uvijek naći jedan dovoljno malen broj $\varepsilon_2 > 0$ takav, da je za $|\xi - x_n| < \varepsilon_2$ uvijek $f(\xi) - \delta < f(x_n) < f(\xi) + \delta$. Označimo sa ε onaj od bro-

jeva ε_1 i ε_2, koji je manji. Tada za sve vrijednosti indeksa n, za koje je $|\xi - x_n| < \varepsilon$ i za koje su ispunjene nejednačine (5), vrijede nejednačine

(6) $$2a - \xi - \varepsilon < f(x_n) < f(\xi) + \delta .$$

Međutim, na osnovu pretpostavke 1^0 moguće je izabrati δ (i ε) tako, da je $2a - \xi - f(\xi) > \delta + \varepsilon$, što je u protivrječnosti sa (6). Prema tome mora biti $\xi = \eta = a$. Niz (x_n) je konvergentan i $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

I. 3. Pretpostavimo, da je $x_n < a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ili da je $x_n > a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tada je niz konvergentan. Neka je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi \neq a$. Tada bi zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$ bilo

$$f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \xi ,$$

što se protivi učinjenoj pretpostavci 1^0. Prema tome je $\xi = a$.

P r i m j e r 1. — Neka je $f(x) = x + \sin x$. U ovom primjeru je $a = (2k + 1)\pi$, $b = \pi$; $a - b = 2\pi \cdot k$, $a + b = 2\pi \cdot (k + 1)$. Uslovi 1^0, 2^0, 3^0 su uvijek ispunjeni, ako je $2\pi \cdot k < x_0 < 2\pi \cdot (k + 1)$. Prema tome je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = (2k + 1)\pi$.

II. *Neka je* $f(x) > -x + 2a$ *za* $x < a$, $f(x) > x$ *za* $x > a$, $f(a) \geqq a$ $(b \to \infty)$.

Niz (x_n) *je divergentan i* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ *s tim, da je* $x_0 \neq a$, *ako je* $f(a) = a$.

D o k a z. — Neka je $x_0 \gtrless a$. Tada je $x_{n+1} > x_n > a$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$, pa je niz (x_n) konvergentan ili je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$. Pretpostavimo, da je konvergentan i da je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi > a$. Tada iz jednačine $x_{n+1} = f(x_n)$, zbog neprekidnosti funkcije $f(x)$, prelaskom na granicu, dobijamo, da je $\xi = f(\xi)$, što se protivi pretpostavci. Prema tome je $\lim x_n = +\infty$.

Za $f(a) = a$ i $x_0 = a$ je $x_n = a$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Ako je pak $f(a) > a$ i $x_0 = a$, tada je $x_{n+1} > x_n > a$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

III. *Neka je:*

$$f(x) < x \quad \text{za} \quad x < a ,$$
$$f(x) < -x + 2a \quad \text{za} \quad x > a ,$$
$$f(a) \leq a , \quad (b \to +\infty) .$$

Niz (x_n) *je divergentan i* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ *s tim da je* $x_0 \neq a$, *ako je* $f(a) = a$. Za $f(a) = a$ i $x_0 = a$ je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Dokaz se izvodi slično kao i pod II.

IV. *Neka je:* $x < f(x) < a$ *za* $x < a$, $f(x) > x$ *za* $x > a$, *dakle zbog neprekidnosti od* $f(x)$, $f(a) = a$. *Tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *za* $a - b \leqq \leqq x_0 \leqq a$, *odnosno* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *za* $x_0 > a$ *i* $b \to +\infty$.

D o k a z. — Za $a - b < x_0 < a$ ispunjeni su uslovi I. 3. Niz (x_n) je monotono rastući i ograničen, te je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Za $x_0 > a$ $(b \to +\infty)$ ispunjeni su uslovi navedeni pod II. Niz (x_n) je monotono rastući i neograničen, te je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

V. *Neka je* $f(x)$ *jednoznačna, neprekidna, monotono opadajuća funkcija i neka je:* $f(a) = a$ *i* $\xi_i = f[f(\xi_i)]$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *gdje su* ξ_i *određeni brojevi, kojih može biti konačno ili beskonačno mnogo, takvi, da je* $a = \xi_0$, $\xi_i > \xi_{i+1}$. *Tada svakom broju* ξ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ *odgovara po jedan broj* $\xi_i' > a$ *takav, da je* $\xi_i' = f(\xi_i) = f[f(\xi_i')]$. *Za* $i = 0$ *je* $\xi_0 = \xi_0' = a$.

D o k a z. — Iz već navedenih pretpostavki slijedi, da je $f(\xi_i) = \xi_i' > a$. Iz $\xi_i'' = f(\xi_i') = f[f(\xi_i)] = \xi_i < a$ slijedi, da je $f[f(\xi_i')] = f(\xi_i'') = f(\xi_i) = \xi_i'$, čime je tvrdnja dokazana. Za $i = 0$ je $\xi_0' = f(\xi_0) = f(a) = a$.

Zbog monotonije funkcije $f(x)$ mora za $i \geqq 1$ biti $\xi_{i+1}' > \xi_i' > > a$, jer je $\xi_{i+1} < \xi_i < a$.

V. I. *Uz pretpostavke navedene pod V. neka je još*

$f[f(x)] > x$ *za* $\xi_{i+1} < x < \xi_i$ *i neka je* $\xi_{i+1} < x_0 < \xi_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$

Tada je niz (x_n) *za* $i = 1, 2, 3, \ldots$ *divergentan sa dvije tačke nagomilavanja, te je* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \xi_i$, $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \xi_i'$.

Za $i = 0$ *niz je konvergentan i* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

D o k a z. — Iz navedenih pretpostavki potpunom indukcijom zaključujemo, da je

$$\xi_{i+1} < x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} < \ldots < \xi_i < a < \xi_i' < \ldots < x_{2n+1} < \ldots < x_3 < x_1 < \xi_{i+1}'.$$

Ako sa η_i i η_i' označimo granične vrijednosti nizova (x_{2n}) i (x_{2n+1}), tada možemo pisati

$$\xi_{i+1} < \eta_i = \lim_{n\to\infty} x_{2n} \leq \xi_i, \quad \xi_{i+1}' > \eta_i' = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} \geq \xi_i'.$$

Iz jednačina $x_{2n+2} = f[f(x_{2n})]$ i $x_{2n+3} = f[f(x_{2n+1})]$, prelaskom na granice, dobijamo, da je $\eta_i = f[f(\eta_i)]$ i $\eta_i' = f[f(\eta_i')]$, a to je moguće prema pretpostavci, samo ako je $\eta_i = \xi_i$ i $\eta_i' = \xi_i'$. Time je tvrdnja dokazana.

Na sličan se način dokazuje, da je

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \xi_i', \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \xi_i \quad \text{za} \quad \xi_i' < x_0 < \xi_{i+1}'.$$

Slučaj kada je $x_0 = \xi_i$ ili $x_0 = \xi_i'$ je trivijalan. Tada je

$$x_{2n} = \xi_i, \quad x_{2n+1} = \xi_i' \quad \text{za} \quad x_0 = \xi_i$$

$$\text{odnosno} \quad x_{2n} = \xi_i', \quad x_{2n+1} = \xi_i \quad \text{za} \quad x_0 = \xi_i'.$$

V. 2. *Uz pretpostavke navedene pod V. neka je još $f[f(x)] < x$ za $\xi_{i+1} < x < \xi_i$ i neka je $\xi_{i+1} < x_0 < \xi_i$. Tada je niz (x_n) divergentan sa dvije tačke nagomilavanja, te je*

$$\lim_{n\to\infty} \inf. x_n = \xi_{i+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \sup. x_n = \xi_{i+1}'.$$

D o k a z. — Na sličan način kao i pod V. 1. dokazuje se, da je

$$\xi_{i+1} < \ldots < x_{2n} < \ldots < x_2 < x_0 < \xi_i < a < \xi_i' < x_1 < x_3 < \ldots x_{2n+1} < \ldots < \xi_{i+1}',$$

a odavde da je $\lim\limits_{n\to\infty} \inf. x_n = \xi_{i+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup. x_n = \xi_{i+1}'$.

Ako je $\xi_{i+1} = -\infty$, tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} \inf. x_n = -\infty$, a $\lim\limits_{n\to\infty} \sup. x_n = \xi_{i+1}' = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ako je $\xi_{i+1}' = +\infty$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \sup. x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf. x_n = \xi_{i+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Ako je pak $\xi_{i+1} = -\infty$, $\xi_{i+1}' = +\infty$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \inf. x_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \sup. x_n = +\infty.$$

Zaključci, uglavnom, ostaju isti, ako pretpostavimo, da je $\xi_i' < x_0 < \xi_{i+1}'$.

P r i m j e r 2. — Data je funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Jednačina $f[f(x)] = x$ glasi $x^4 = x$ i ona ima korjene $x = 0$ i $x = 1$. Kako je $x = 1$ korijen i jednačine $f(x) = \frac{1}{x^2} = x$, to je $a = \xi_0 = 1$, $\xi_1 = 0$ i $\xi_1' = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$. U ovom primjeru je $f[f(x)] = x^4 < x$ za $0 < x < 1$. Prema tome je niz $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}$ za $x_0 > 0$ i $x_0 \neq 1$ divergentan sa dvije tačke nagomilavanja: $\xi_1 = 0$ i $\xi_1' = +\infty$.

V. 3. *Neka je uz pretpostavke navedene pod V. još i* $f[f(x)] = x$ *za* $x < a$ i $x_0 \neq a$. *Tada je niz* (x_n) *divergentan i* $x_{2n} = x_0$, $x_{2n+1} = f(x_0)$ *za* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dokaz. — Iz $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f[f(x_0)] = x_0$, $x_3 = f(x_2) = f(x_0) = x_1$ i t. d., potpunom indukcijom, zaključujemo, da je $x_{2n} = x_0$, $x_{2n+1} = x_1$.

Primjedba: Uslov da je $f[f(x)] = x$, za određene vrijednosti od x, ekvivalentan je uslovu, da kriva linija čija je jednačina $y = f(x)$, ima sa krivom linijom $x = f(y)$ zajedničke tačke čije su apscise posmatrane vrijednosti od x. U slučaju V. 3. obadvije jednačine $y = f(x)$ i $x = f(y)$ predstavljaju istu krivu liniju simetričnu u odnosu na pravu $y = x$ kao osu simetrije. — Ispitivanje znaka izraza $f[f(x)] - x$ svodi se na ispitivanje znaka razlike $x_1 - x$ apscisa tačaka jednakih ordinata krivih linija $x_1 = f(y)$ i $y = f(x)$.

Primjer 3. Ispitati konvergenciju i divergenciju niza definisanog jednačinom $x_{n+1} = c^{x_n}$; $c > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ovdje je dakle $f(x) = c^x$. Prema vrijednosti od c potrebno je razlikovati više slučajeva:

a) $c > e^{\frac{1}{e}}$. Tada je $f(x) = c^x > x$ za $-\infty < x < +\infty$. Niz (x_n) je monotono rastući i nije ograničen, te je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ za $-\infty < x_0 < +\infty$.

b) $c = e^{\frac{1}{e}}$. U ovom slučaju je $f(x) = x$ za $x = a = e$. Osim toga je

$$\begin{aligned} x < f(x) < a < e \quad &\text{za} \quad x < a = e, \\ f(x) > x \quad &\phantom{\text{za}} \quad x > a = e, \end{aligned}$$

Prema IV. niz je monotono rastući, te je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = e$ za $x_0 < e$, odnosno $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ za $x_0 > e$, odnosno $x_n = e$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ za $x_0 = e$.

c) $1 < c < e^{\frac{1}{e}} < e$. U ovom slučaju jednačina $f(x) = c^x = x$ ima dva rješenja a_1 i a_2, takva da je $1 < c < a_1 < e < a_2$. Za $x < a_1$ je $a_1 > f(x) > x$, pa je niz (x_n) monotono rastući niz. Ispunjeni su uslovi I. 3. i $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a_1$, ako je $x_0 < a_1$, odnosno $x_n = a_1$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ ako je $x_0 = a_1$.

Ako je pak $a_1 < x < a_2$, tada je $a_1 < f(x) < x < a_2$ i niz (x_n) je monotono opadajući. Opet su ispunjeni uslovi I. 3., te je $\lim_{n\to\infty} x_n = a_1$, ako je $a_1 < x_0 < a_2$, odnosno $x_n = a_2$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$, ako je $x_0 = a_2$. Ako je pak $x_0 > a_2$, niz (x_n) je prema II. divergentan i $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

d) $c = 1$. U ovom slučaju je $x_n = 1$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $-\infty < x_0 < +\infty$.

e) $\left(\frac{1}{e}\right)^e < c < 1$. U ovom slučaju jednačina $f[f(x)] = x$ ima samo jedno rješenje $\xi_0 = a = f(a)$. Osim toga je $f[f(x)] > x$ za $x < a$. Stoga je prema V. 1. niz (x_n) konvergentan i $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ za sve vrijednosti od x_0 u intervalu $(-\infty, +\infty)$. Niz (x_n) se sastoji od dva niza: niza (x_{2n}) i niza (x_{2n+1}), $n = 0, 1, 2, \ldots$ od kojih je jedan monotono opadajući, drugi monotono rastući ili obrnuto, što zavisi od toga, da li je $x_0 < a$ ili je $x_0 > a$.

f) $c = \left(\frac{1}{e}\right)^e$. U ovom slučaju vrijedi sve što je rečeno pod e) s dopunom, da je u ovom slučaju $a = \frac{1}{e}$.

g) $0 < c < \left(\frac{1}{e}\right)^e$. U ovom slučaju jednačina $f[f(x)] = x$ ima tri rješenja: $\xi_0 = a$, ξ_1 i ξ_1'. Pri tome je $c < \xi_1 < \xi_0 = a < \frac{1}{e} < \xi_1' < 1$. Osim toga je $f[f(x)] < x$ za $\xi_1 < x < a$, odnosno $f[f(x)] > x$ za $x < \xi_1$. Prema V. 1. i V. 2. niz se sastoji od dva monotona, konvergentna niza: (x_{2n}) i (x_{2n+1}), $n = 0, 1, 2, \ldots$, za koje je

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_{2n} &= \xi_1\\ \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} &= \xi_1'\end{aligned}\right\} \text{za} \left\{\begin{aligned}&x_0 < a\\ &\quad\text{i}\\ &x_0 \neq \xi_1,\end{aligned}\right. \quad \text{odnosno} \quad \left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_{2n} &= \xi_1'\\ \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} &= \xi_1\end{aligned}\right\} \text{za} \left\{\begin{aligned}&x_0 > a\\ &\quad\text{i}\\ &x_0 \neq \xi_1'.\end{aligned}\right.$$

Iz podataka navedenih pod b), c), d), e) i f), ukoliko se odnose na slučaj konvergencije niza $x_{n+1} = c^{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, vidi se, da je granica tog niza, koju ćemo sada označiti sa y, funkcija od c, definisana jednačinom

$$y = x^y, \quad \left(\frac{1}{e}\right)^e \leq x \leq e^{\frac{1}{e}}, \tag{7}$$

gdje je mjesto c stavljeno x.

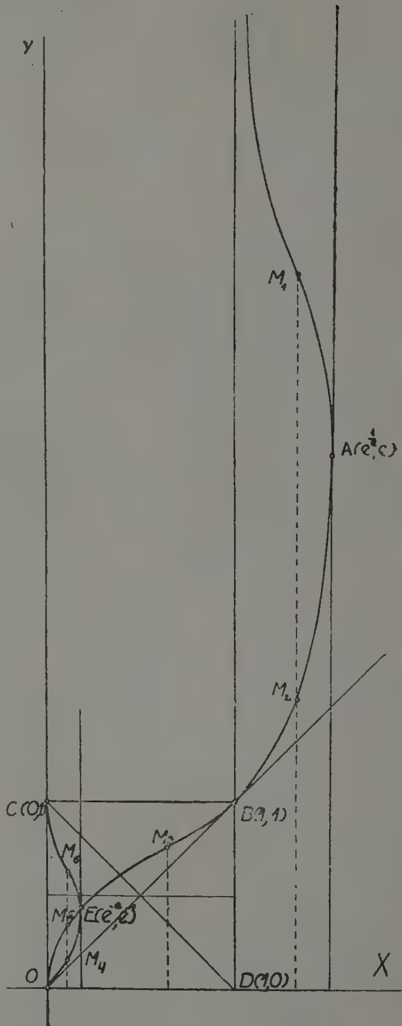
Iz podataka navedenih pod g) vidi se, da su donja i gornja granica ξ_1 i ξ_1' niza $x_{n+1} = c^{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ funkcije od c, definisane jednačinom

$$(8) \qquad y = x^{x^y}, \quad 0 < x < \left(\frac{1}{e}\right)^e,$$

gdje smo y stavili mjesto ξ, a x mjesto c. Međutim, lako se uviđa, da je funkcija (7) potpuno obuhvaćena funkcijom (8). Prema tome, sve tačke nagomilavanja niza $x_{n+1} = c^{x_n}$, koje nisu u beskonačnosti, određene su jednačinom (8).

Na slici je prikazana funkcija (8), koja se sastoji od dvije grane: OM_5EBAM_1 i OM_4EM_6C. Prva grana je ujedno i grafikon funkcije (7). — Ordinate tačaka M_1 do M_6 označene su oznakama upotrebljenim u tekstu zadataka.

Ako u primjeru 3. stavimo da je $x_0 = c$, dobije se kao specijalan slučaj zadatak, koji je postavljen pod brojem 142 u *Glasniku matematičko-fizičkom i astronomskom* T. 5. od 1950. god.*).



$M_1(x, a_2)$, $M_2(x, a_1)$, $M_3(x, a = \xi_0)$, $M_4(x, \xi_1)$, $M_5(x, \xi_0)$, $M_6(x, \xi_1')$

$$\lim_{x \to 1+0} a_2 = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{\xi_1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{\xi_0}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{1 - \xi_1'}{x} = -\infty$$

(Primljeno 19. III. 1951.)

---

*) Isporedi i: K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1931, 110.

SUR LA CONVERGENCE DE LA SUITE DÉFINIE PAR LA FORMULE $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

par

Mahmud Bajraktarević, Sarajevo

Résumé

Dans ce travail on donne quelque criterium de convergence et de divergence de la suite dont les termes x_n sont définis par la formule

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où $f(x)$ représente une fonction continue et uniforme et, particulièrement, une fonction continue, uniforme et décroissante. A titre d'application des résultats obtenus on examine ensuite les conditions de convergence de la suite définie par la formule

$$x_{n+1} = c^{x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, c > 0.$$

O VISINAMA TROKUTA U HIPERBOLIČKOJ GEOMETRIJI

Sibe Mardešić, Zagreb

Da poznati stavak euklidske planimetrije o sjecištu visina trokuta vrijedi i u hiperboličkoj geometriji, analitički je dokazao L. Gérard[1]) (1892). Na tom je stavku osnovao jednostavnu konstrukciju distance paralelnosti za zadani kut. H. Liebmann[2]) je 1904. god. dokazao egzistenciju sjecišta visina elementarno geometrijski i primijenio na konstrukciju zajedničke normale dviju hiperparalela. Kako Gérard, tako i Liebmann, dokazali su stavak i za trokute sa beskonačno dalekim i idealnim vrhovima.

U ovom članku su Liebmann-ovi elementarno geometrijski dokazi za pojedine slučajeve sjedinjeni u uniforman dokaz, koji gotovo istodobno obuhvaća sve slučajeve. Kao i kod Liebmann-a, ovaj dokaz zasniva se na dobro poznatom pomoćnom stavku, da se simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku uvijek u istoj točki, dok se po dvije simetrale vanjskih kutova i simetrala unutrašnjeg kuta pri trećem vrhu sijeku također u jednoj »točki«, koja može biti obična (T), beskonačno daleka (K), ili idealna (J)[3]).

I. *Teorem o visinama u »trokutu«*

U svakom »trokutu« ABC hiperboličke ravnine, za koji postoje sve tri visine AA', BB', CC', prolaze one sve tri istom »točkom« S. Te su visine ujedno simetrale kutova za trokut $A'B'C'$, kojeg određuju njihova nožišta A', B', C', i to ili tri unutarnje simetrale, ili jedna unutarnja i dvije vanjske.

Dokaz: Označimo »vrhove« promatranog »trokuta« na ovaj način:

Ako ima vrhova tipa T, neka bude $C \equiv T$; ako ih ima više, neka je $\sphericalangle C$ maksimalan. Ako nema vrhova tipa T, ali ima vrhova

---

[1]) L. Gérard: Sur la géométrie non-euclidienne. Thèses, Paris 1892, str. 54, 73.

[2]) H. Liebmann: Math. Ann. 59 (1904), str. 110.
Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 20 (1911), str. 56.
Nichteuklidische Geometrie, III. Aufl. (1923), str. 31.

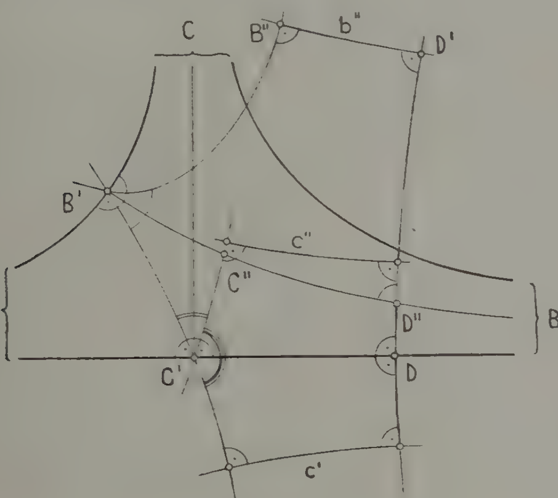
[3]) U ovom članku upozoravamo navodnim znakovima kada se radi o elementima, koji mogu biti u konačnosti, beskonačno daleki i idealni. Obične točke označujemo sa T, beskonačno daleke sa K, a idealne sa J. (Prema prof. R. Cesarcu).

tipa K, neka je $C \equiv K$. Ako ima vrhova tipa J, neka je $A \equiv J$. Ako je $A \equiv J$ i $B \equiv J$, neka je $AC' \leq BC'$.

1. $C \equiv T$, $\sphericalangle C < 90^0$; $C \equiv K$; $C \equiv J$.

Nožište C' »visine« CC' pada unutar »dužine« AB, a nožište B' »visine« BB' pada unutar »dužine« AC. Zrcalimo spojnicu $B'C'$ na »visinama« BB' i CC' i dokažimo, da se dobiveni pravci $B'B''$ i $C'C''$ sijeku u nekoj točki A' u konačnosti. U tu svrhu pokažimo, da neovisno o tipu »točke« B postoji na polupravcu $C'B$ takova točka D, da okomica DD' dignuta u toj točki na pravac $C'B$ bude:

a) hiperparalelna sa $B'C'$,
b) da siječe BB' u nekoj točki D'' i
c) da bude $\sphericalangle D'D''B' \leq 90^0$ (sl. 1).



Sl. 1

Ako je $B \equiv T$, tada je $\sphericalangle B'C'A > \sphericalangle B'BC'$ kao vanjski kut u trokutu, pa je $\Delta(\sphericalangle B'C'A) < \Delta(\sphericalangle B'BC')$[4] i svaka točka D s polupravca $C'B$, za koju je

$$\Delta(\sphericalangle B'C'A) < C'D < C'B + \Delta(\sphericalangle B'BC')$$

zadovoljava gornjim uvjetima, što se neposredno može provjeriti.

Ako je $B \equiv K$, tada svaka točka D polupravca $C'B$, za koju je $\Delta(\sphericalangle B'C'A) < C'D$ zadovoljava gornjim uvjetima.

Ako je $B \equiv J$, tada zbog uvedenog načina označavanja »vrhova«, slijedi, da je $A \equiv J$, $AC' \leq BC'$, dakle $\Pi(AC') \geq \Pi(BC')$[4].

[4]) $\Delta(x)$ = distanca paralelnosti za kut x.
$\Pi(y)$ = kut paralelnosti za distancu y.

Lako se vidi, da je pravac $B'C'$ hiperparalelan sa pravcem A[5]), t. j. da je $\sphericalangle B'C'A > \Pi(AC')$, pa je zbog $\Pi(AC') \geq \Pi(BC')$, $\sphericalangle B'C'A > \Pi(BC')$, što znači, da je $B'C'$ hiperparalelan i sa pravcem B. Pravac B zadovoljava međutim i uvjetima b) i c), tako da je $B = DD'$.

Pravac DD' je zbog simetrije hiperparalelan i s pravcem $C'C''$, odakle slijedi, da $C'C''$ siječe dužinu $B'D''$ u jednoj njezinoj unutarnjoj točki C''.

Pretpostavka, da se pravci $B'B''$ i $C'C''$ ne sijeku, vodi tada do zaključka, da $B'B''$ i $D'D''$ leže s raznih strana pravca $C'C''$ i da su također hiperparalelni. Povlačenjem zajedničkih normala c', c'' i b'' pravaca $B'C'$, $C'C''$ i $B'B''$ prema pravcu $D'D''$ dobivamo s jedne strane sukladne četverokute $C'c'D \cong C'c''D$, iz kojih slijedi $c' = c''$; dok s druge strane dobivamo četverokute $B'c'D''$ i $B'b''D''$, koji se podudaraju u stranici $B'D''$, kutovima uz B' i pravim kutovima uz c' i b''. Zbog $\sphericalangle B'D''b'' \leq 90^0$, $\sphericalangle B'D''c' \geq 90^0$, što povlači $\sphericalangle B'D''b'' \leq \sphericalangle B'D''c'$, slijedi $b'' \leq c'$, tako da imamo konačno $b'' \leq \leq c''$. Dobivena je kontradikcija, jer bi zbog međusobnog položaja pravaca $B'B''$, $C'C''$ i $D'D''$ ($B'B''$ i $D'D''$ leže s raznih strana pravca $C'C''$) morao biti pravac $D'D''$ »udaljeniji« od $B'B''$ nego li od $C'C''$, t. j. moralo bi biti $b'' > c''$. Time je dokazana egzistencija sjecišta A'.

Za dobiveni trokut $A'B'C'$ su »točke« B i C »sjecišta« po jedne unutarnje i jedne vanjske kutne simetrale kroz B' i C'. Vanjska kutna simetrala kroz A' mora dakle prema pomoćnom stavku ići »točkama« B i C. Drugim riječima, točka A' leži na stranici BC zadanog »trokuta«, koja se prikazuje kao vanjska kutna simetrala kroz vrh A' trokuta $A'B'C'$ (sl. 2). Okomica na BC u točki A', kao unutarnja simetrala, mora ići »točkom« A, »sjecištem« vanjskih kutnih simetrala kroz B' i C', te se prikazuje kao treća visina AA'; ali ona ide i sjecištem S unutarnjih simetrala BB' i CC', što dokazuje tvrdnju stavka. U ovom slučaju je sjecište visina S točka u konačnosti, a visine su unutrašnje kutne simetrale nožišnog trokuta $A'B'C'$.

2. $C = T$, $\sphericalangle C > 90^0$.

Nožište C' visine CC' pada unutar »dužine« AB, a nožište A' visine AA' izvan »dužine« BC.

Egzistenciju sjecišta B' pravaca $A'A''$ i $C'C''$ dobivenih zrcaljenjem spojnice $A'C'$ na visinama AA' i CC', dokazujemo na sasvim sličan način, t. j. odabiranjem točke D na polupravcu $C'B$, sa svojstvima da okomica DD' u D na BC' bude:

a) hiperparalelna sa $A'C'$,

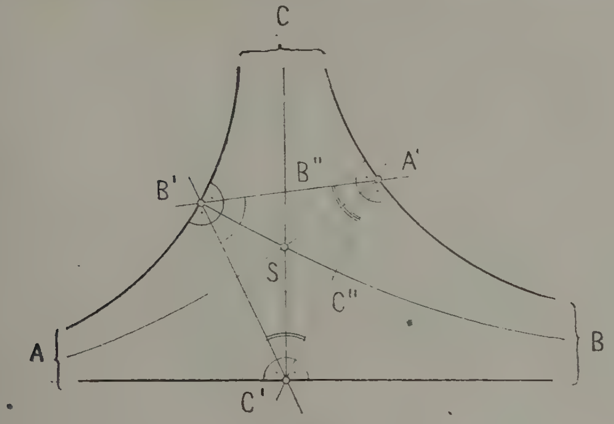
b) da siječe $A'B$ u točki D'' i

c) da bude $\sphericalangle D'D''A' \leq 90^0$.

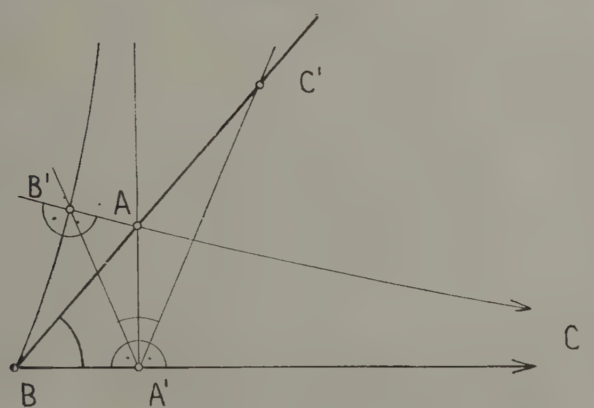
---

[5]) Zbog jednostavnosti označujemo idealnu točku, zajedničku normalu hiperparalela koja tu točku predstavlja, te konačno nožišta te normale istim slovom.

Unutarnja kutna simetrala kroz vrh B' trokuta $A'B'C'$ mora ići sjecištem C dviju unutarnjih simetrala i »sjecištem« A dviju vanjskih simetrala kroz vrhove A' i C'. Drugim riječima, točka B' leži na stranici AC zadanog »trokuta«. Okomica na AC u točki B', kao vanjska simetrala mora ići »točkom« B, te se prikazuje kao



Sl. 2



Sl. 3

treća visina BB'; ali ona mora ići i »sjecištem« S vanjske simetrale AA' i unutarnje CC', što dokazuje tvrdnju stavka.

U ovom slučaju sjecište visina S može biti tipa T, K ili J; dvije visine su vanjske simetrale, a jedna je unutarnja simetrala nožišnog trokuta $A'B'C'$.

3. $C \equiv T$, $\sphericalangle C = 90^0$.

Prvi dio stavka je trivijalan, jer se visine sijeku u vrhu C uz pravi kut; drugi dio gubi smisao, jer nožišni trokut $A'B'C'$ degenerira u dužinu CC'.

Time je teorem o visinama u potpunosti dokazan.

II. O konstrukcijama Gérard-a i Liebmann-a

Konstrukcija distance paralelnosti po Gérard-u teče ovako:

Na jednom kraku zadanog oštrog kuta odabire se točka A tako, da paralela AC s drugim krakom, zatvara s prvim krakom BA tupi kut (sl. 3). Time je dobiven »trokut« ABC tipa TTK s oštrim kutom uz A. Iz A i B spuštamo visine, a iz njihovog sjecišta S, koje leži u konačnosti, okomicu SC' na treću stranicu; ona ide »točkom« C. BC' je tražena distanca paralelnosti.

Točku A traženog svojstva je uvijek moguće naći, na primjer nanošenjem neke dužine dovoljno veliki broj puta na krak BA. Zgodnije je međutim iskoristiti drugu, mjesto prve tvrdnje teorema o visinama. Tada točka A može biti uzeta po volji; spojnicu $A'B'$ treba zrcaliti na jednoj od visina, i sjecište s krakom BA je tražena točka C'.

Ista modifikacija može se primijeniti i na odgovarajuću Liebmann-ovu konstrukciju zajedničke normale dviju hiperparalela.

(Primljeno 19. III. 1951.)

SUR LES HAUTEURS DES TRIANGLES EN GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

par

Sibe Mardešić, Zagreb

Résumé

Dans cet article on démontre un théorème bien connu[1]) de la planimétrie hyperbolique:

Pour un triangle donné ABC du plan hyperbolique, quelle que soit la nature de ses sommets, les trois hauteurs AA', BB', CC' (à condition qu'elles existent) concourent en un même point S (réel T, limite K ou idéal J) et en même temps, les hauteurs sont les bissectrices des angles du triangle $A'B'C'$. Elles sont ou bien toutes intérieures, ou bien deux extérieures et une intérieure.

L'objet de la démonstration suivante est d'unir, dans la mésure du possible, les démonstrations élémentaires données pour certains cas par H. Liebmann[2]).

Dans la suite, on introduit les notations suivantes:

Si le triangle donné a des sommets réels T, on pose $C \equiv T$; s'il y en a plusieurs, l'angle $\sphericalangle C$ sera maximal. S'il n'y a pas des sommets du type T, mais si ceux du type K existent, on pose $C \equiv K$. S'il s'agit des sommets du type J, on pose $A \equiv J$; enfin, dans le cas $A \equiv J$ et $B \equiv J$, soit $AC' \leq BC'$.

Démonstration. 1. $C \equiv T$, $\sphericalangle C < 90^0$; $C \equiv K$; $C \equiv J$. Soient $B'B''$ et $C'C''$ deux droites symétriques de la droite $B'C'$ par rapport aux hauteurs BB', resp. CC' (fig. 1). Pour démontrer que leur point de rencontre A' est réel, on construit un point D sur la demi-droite $C'B$, satisfaisant aux conditions suivantes:

a) la perpendiculaire DD' sur $C'B$ est hyperparallèle à $B'C'$,
b) elle coupe BB' en un point D'',
c) $\sphericalangle D'D''B' \leq 90^0$.

L'hypothèse contraire, c'est-à-dire que $B'B''$ et $C'C''$ ne concourent pas, a pour conséquence que $B'B''$ et $D'D''$ sont hyperparallèles et sont placées de côtés différents de la droite $C'C''$, de sorte qu'on a $b'' > c''$, tandis que la consideration des quadrilatères $C'c'D$ et $C'c''D$ d'une part, et $B'c'D''$ et $B'b''D''$ de l'autre, nous donne les relations $c' = c''$ et $c' \geq b''$, d'où il résulte $c'' \geq b''$, contrairement au résultat précédent.

En appliquant plusieurs fois au triangle obtenu $A'B'C'$ la propriété connue d'un triangle réel, que les bissectrices intérieures concourent en un même point réel, tandis que les deux bissectrices extérieures et la troisième intérieure se rencontrent en un point réel, limite ou idéal, on arrive d'abord au résultat que A' se

trouve sur le coté BC, puis que AA' est la troisième hauteur et enfin qu'elle passe par le point S (fig. 2).

2. $C = T$, $\sphericalangle C > 90^0$. On traite ce cas par analogie, en abaissant les hauteurs des points C et A.

3. $C \equiv T$, $\sphericalangle C = 90^0$. Ce cas est trivial.

Enfin on peut faire une remarque sur la construction bien connue de L. Gérard qui donne la distance de parallélisme pour un angle donné (fig. 3), et se basant sur la première partie du théorème démontré. Par contre, en s'appuyant sur la seconde partie du même théorème, on donne une construction dans laquelle le choix du point A ne dépend aucunément de la condition $\sphericalangle CAB < < 90^0$. En effet, quel que soit le point A sur la demi-droite BC', le point cherché C' satisfaisant à la condition $BC' = \Delta(\sphericalangle ABC)$ s'obtient comme point de rencontre de la droite BA et de celle qui est symétrique de $A'B'$ par rapport à l'une des hauteurs AA' ou BB'.

La même modification peut s'appliquer à la construction analogue de la perpendiculaire commune des deux droites hyperparallèles.

ELEKTRONSKA BALISTIKA U SVIJETLU LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Branko Berkeš, Zagreb

Proučavanje staza elektrona u električkim, magnetskim ili elektromagnetskim poljima, kod zanemarenog djelovanja prostornog naboja, vodi na diferencijalne jednadžbe raznih tipova, koje se prema prilikama mogu riješiti prikladnim metodama. Ako su postavljene diferencijalne jednadžbe gibanja linearne ili ako se mogu svesti na ove, pruža za takove slučajeve Laplace-ova transformacija najbrži i najjednostavniji put rješenju, uz proizvoljne početne uvjete.

Laplace-ovom transformacijom mogu se rješavati sve jednadžbe gibanja elektrona, kojih su brzine mnogo manje od brzine svjetlosti, što znači, da probleme moramo promatrati nerelativistički, a to je praktički većinom dopustivo. Pretpostavka homogenosti polja neophodna je, izuzevši nekoliko specijalnih slučajeva, a također je za primjenu Laplace-ove transformacije potrebno pretpostaviti, da polje počinje djelovati u trenutku $t = 0$, od kojega na dalje bilježimo naša zapažanja.

Prethodno je potrebno, da se upoznamo s osnovnim zakonima Laplace-ove transformacije. Ista se definira sa

$$LA(t) = p \int_0^\infty e^{-pt} \cdot A(t) \cdot dt = f(p)$$

i preslikava funkciju promjenljive t u područje funkcija varijable p. Preslikavanjem se diferencijalne jednadžbe prevode u algebarske jednadžbe, te se nakon rješavanja recipročnom transformacijom

$$L^{-1} f(p) = \frac{1}{2j\pi} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{f(p)}{p} \cdot e^{pt} \cdot dp = A(t)$$

prevode opet u područje diferencijalnih jednadžbi. Iz definicije Laplace-ove transformacije lako je pokazati, da vrijedi

$$L \frac{dA(t)}{dt} = -p \cdot A(0) + p \cdot LA(t),$$

$$L \frac{d^2A(t)}{dt^2} = -p^2 \cdot A(0) - p \cdot A'(0) + p^2 \cdot LA(t). \text{ itd.}$$

Obzirom na vrlo male dimenzije elektrona mogu se za gibanje ovog primijeniti zakoni gibanja materijalne točke, poznati iz mehanike. Na temelju ovih zakona slijedi onda za proizvoljno elektromagnetsko polje (Q je pozitivna veličina i označuje naboj elektrona)

$$\mathbf{P} = m \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{d t^2} = - Q \cdot \mathbf{F} - Q\,[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

odnosno u kartezijskim pravokutnim koordinatama:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} = - Q \cdot F_x + Q \cdot B_y \cdot \frac{d z}{d t} - Q \cdot B_z \cdot \frac{d y}{d t},$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{d t^2} = - Q \cdot F_y + Q \cdot B_z \cdot \frac{d x}{d t} - Q \cdot B_x \cdot \frac{d z}{d t},$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{d t^2} = - Q \cdot F_z + Q \cdot B_x \cdot \frac{d y}{d t} - Q \cdot B_y \cdot \frac{d x}{d t},$$

a u cilindričkim koordinatama:

$$m \cdot \left[\frac{d^2 r}{d t^2} - r \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2\right] = - Q \cdot F_r + Q \cdot B_\varphi \cdot \frac{d z}{d t} - Q \cdot B_z \cdot r \cdot \frac{d \varphi}{d t},$$

$$\frac{m}{r} \cdot \frac{d}{d t}\left(r^2 \cdot \frac{d \varphi}{d t}\right) = - Q \cdot F_\varphi + Q \cdot B_z \cdot \frac{d r}{d t} - Q \cdot B_r \cdot \frac{d z}{d t},$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{d t^2} = - Q \cdot F_z + Q \cdot B_r \cdot r \cdot \frac{d \varphi}{d t} - Q \cdot B_\varphi \cdot \frac{d r}{d t}.$$

Nuždan uvjet za rješavanje jednadžbi gibanja elektrona u cilindričkom koordinatnom sustavu pomoću Laplace-ove transformacije je

$$\ddot{\varphi} = 0 \left(\frac{d \varphi}{d t} = A = \text{const}\right).$$

U primjeni, koja slijedi niže, označivat ćemo transformirane x, y i z sa ξ, η i ζ odnosno transformirane r i φ sa ϱ i ψ. Operatoru deriviranja odgovara u području slikâ varijabla p.

1) Elektron izlazi iz ravnine x, y s početnom brzinom v_0 u smjeru osi z koordinatnog sustava, koja ujedno predstavlja smjer električkog polja (smisao polja je negativan):

$$m \cdot \frac{d^2 z}{d t^2} = - Q \cdot F, \quad p^2 \zeta - p \cdot v_0 = - \frac{Q \cdot F}{m}, \quad \zeta = - \frac{Q \cdot F}{m} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{v_0}{p},$$

$$z = - \frac{Q \cdot F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_0\, t.$$

Elektron se giba po pravcu jednoliko ubrzano.

2) Na dvije pločaste elektrode razmaknute za d priključen je napon $E_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$. Ako elektron izlazi iz prve elektrode (koja je identična s ravninom x, y) brzinom v_0 u smjeru polja (os z), onda je $\left(d^2 > \frac{Q \cdot E_m}{\omega^2 \cdot m}\right)$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = -Q \cdot F = \frac{Q \cdot E_m}{d} \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

$$p^2 \zeta - p v_0 = \frac{Q \cdot E_m}{m \cdot d} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \omega p + \sin\alpha \cdot p^2}{p^2 + \omega^2},$$

$$\zeta = \frac{Q \cdot E_m}{m \cdot d}\left(\cos\alpha \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} + \cos\alpha \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}\right) + \frac{v_0 p}{p^2},$$

$$z = \frac{Q \cdot E_m}{\omega^2 \cdot d \cdot m}\left[\omega t \cdot \cos\alpha + \sin\alpha - \sin(\omega t + \alpha)\right] + v_0 t.$$

Elektron titra između elektroda, ali se ujedno pomiče naprijed po pravcu.

3) Na elektron, koji izlazi iz ravnine x, y brzinom v_{0x} i v_{0z}, djeluje magnetsko polje smjera osi z $\left(\omega = \frac{Q \cdot B}{m}\right)$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega \cdot \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

$$p^2 \xi - p v_{0x} = -\omega p \eta \rightarrow \xi = \frac{v_{0x}\, p}{p^2 + \omega^2},$$

$$p^2 \eta = \omega p \xi \rightarrow \eta = \frac{v_{0x}\, \omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$p^2 \zeta - p v_{0z} = 0 \rightarrow \zeta = \frac{v_{0z}}{p}$$

$$x = \frac{v_{0x}}{\omega} \cdot \sin\omega t, \quad y = \frac{v_{0x}}{\omega}\left[1 - \cos\omega t\right], \quad z = v_{0z}\, t.$$

Staza elektrona je zavojnica; projekcija staze u x, y ravnini je kružnica sa središtem $\left(0, \frac{v_{0x}}{\omega}\right)$ i polumjerom $\frac{v_{0x}}{\omega}$.

4) Staza elektrona, koji izlazi iz ravnine x, y, u elektromagnetskom polju (vektori električkog odnosno magnetskog polja neka imaju smjer osi z odnosno osi y) određuje se iz jednadžbi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega \cdot \frac{dz}{dt} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{Q \cdot F}{m} - \omega \cdot \frac{dx}{dt}$$

odnosno

$$p^2 \xi = \omega p \zeta \longrightarrow \xi = -\frac{Q \cdot F}{m} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} \longrightarrow x = -\frac{Q \cdot F}{m\,\omega^2}\left[\omega t - \sin\omega t\right]$$

$$p^2 \zeta = -\frac{Q \cdot F}{m} - \omega p \xi \longrightarrow \zeta = -\frac{Q \cdot F}{m} \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} \longrightarrow z = -\frac{Q \cdot F}{m \cdot \omega^2}\left[1 - \cos\omega t\right].$$

Staza elektrona je cikloida.

5) U magnetronu izlazi iz katode (promjer katode može se zanemariti prema dimenzijama cijevi) elektron sa početnom brzinom jednakom nuli. Kako električko polje djeluje radijalno, a magnetsko polje u smjeru osi z, to slijedi

$$\frac{d^2 r}{d t^2} - r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 = -\frac{Q\cdot F}{m} - \omega r \cdot \frac{d\varphi}{d t} \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{d t}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d t}\right) = \omega \frac{d r}{d t}$$

$$p\psi = \frac{\omega}{2} \longrightarrow \varphi = \frac{\omega t}{2}$$

$$p^2 \varrho - \varrho \frac{\omega^2}{4} = -\frac{Q\cdot F}{m} - \varrho \frac{\omega^2}{2} \longrightarrow \varrho = -\frac{Q\cdot F}{m}\cdot\frac{1}{p^2 + \frac{\omega^2}{4}}$$

$$r = -\frac{4Q\cdot F}{m\cdot\omega^2}\left[1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right] = -\frac{4Q\cdot F}{m\cdot\omega^2}\left[1 - \cos\varphi\right].$$

Staza elektrona je kardioida. — Kako maksimalni r dobijemo iz uvjeta $\frac{d r}{d\varphi} = 0$, koji daje

$$r_{\max} = -\frac{8Q\cdot F}{m\cdot\omega^2},$$

to u slučaju $r_{\max} = R_a$ $\left(F = \frac{U_a}{R_a \cdot \ln\frac{R_a}{R_k}}\right)$ elektron »struže« anodu.

6) Elektron uleti u polje pozitivnog naboja Q brzinom v_0. Polje počne djelovati u trenutku, kada se elektron nalazi na najmanjoj udaljenosti $r_{\min}$ od pozitivnog naboja.

Diferencijalna jednadžba gibanja

$$\frac{m}{r}\cdot\frac{d}{d t}\left(r^2\frac{d\varphi}{d t}\right) = 0 \longrightarrow \frac{d\varphi}{d t} = \frac{v_0}{r^2}\cdot r_{\min} \qquad \frac{d^2 r}{d t^2} - r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right) = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{r^2}$$

daje nakon eliminacije parametra t

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{C} \qquad C = \frac{{v_0}^2\cdot r^2_{\min}}{Q^2}\cdot 4\pi\varepsilon_0\cdot m,$$

te sa $L\frac{d}{d\varphi} = p$ i $L\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho}$ vrijedi

$$p^2\frac{1}{\varrho} - p^2\frac{1}{r_{\min}} + \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{C} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{p^2+1} + \frac{\frac{1}{r_{\min}}\cdot p^2}{p^2+1}$$

$$r = \frac{C}{1 + e\cos\varphi} \qquad \left(e = \frac{C - r_{\min}}{r_{\min}}\right).$$

Elektron se giba u polju pozitivnog naboja po elipsi ili hiperboli odnosno paraboli, što ovisi o tome, da li je $e < 1$, $e > 1$ odnosno $e = 1$. Za $r_{\min} < \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{{v_0}^2}\cdot$ staza je elipsa.

7) Ako u nekoj elektronskoj napravi električko polje ima samo tangencijalni smjer, a magnetsko polje smjer osi z, staza elektrona računa se iz jednadžbi

$$\frac{d^2 r}{d t^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\omega r \frac{d\varphi}{dt} \qquad \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = -\frac{Q \cdot F}{m} - \omega \frac{dr}{dt},$$

odakle jednostavno slijedi

$$2 A p \varrho = -\frac{Q \cdot F}{m} + \omega p \varrho \qquad \varrho = -\frac{Q \cdot F}{m} \cdot \frac{1}{2A - \omega} \cdot \frac{1}{p}$$

$$p^2 \left(-\frac{Q \cdot F}{m} \cdot \frac{1}{2A - \omega} \cdot \frac{1}{p}\right) - \frac{Q \cdot F}{m} \cdot \frac{A^2}{2A - \omega} \cdot \frac{1}{p} = -\omega \frac{A}{2A - \omega} \longrightarrow A = \omega$$

$$\varphi = \omega t \qquad r = -\frac{2Q \cdot F}{m \omega} \cdot t = -\frac{2Q \cdot F}{m \omega^2} \varphi = a \cdot \varphi.$$

Krivulja, po kojoj se elektron giba, je Arhimedova spirala.

*

Kako nam već ovih nekoliko primjera pokazuju, primjena Laplace-ove transformacije u rješavanju jednadžbi gibanja elektrona je velika, no ipak ograničena, ako uzmemo u obzir sve mogućnosti konstrukcije elektromagnetskog polja.

(Primljeno 6. III. 1951.)

Literatura:

Wagner, K. W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation, J. A. Barth, Leipzig 1950.

Doetsch, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, J. Springer, Berlin 1937.

Rusterholz, A. A.: Elektronenoptik, Birkhäuser, Basel 1950.

Zworykin, V. K.: Electron Optics and the Electron Microscope, J. Wiley, New York 1945.

— — —: Applied Electronics, J. Wiley, New York 1949.

DIE ELEKTRONENBALLISTIK IM LICHTE DER LAPLACE-TRANSFORMATION

Von Branko Berkeš, Zagreb

Zusammenfassung

Die Bewegungsgleichungen des Elektrons, welche linear sind oder auf solche sich umwandeln lassen, können am einfachsten mittels Laplace-Transformation gelöst werden. Der Verfasser gibt einen kurzen Überblick über Laplace-Transformation und zeigt an manchen Beispielen die Möglichkeiten der Anwendung derselben.

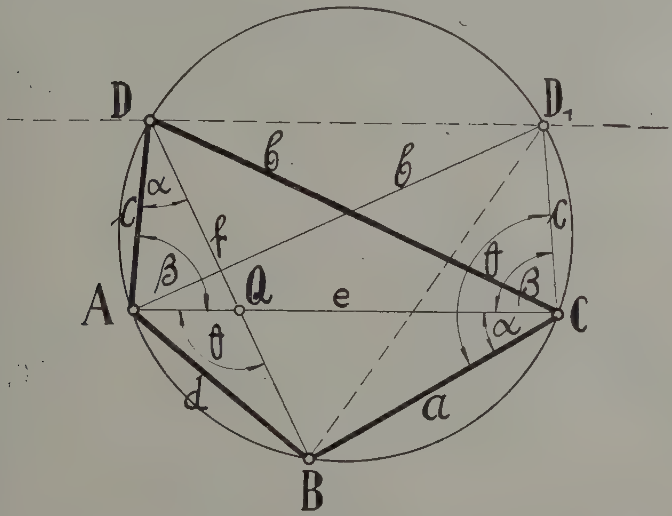
Obwohl die Anwendungsmöglichkeiten der Laplace-Transformation gross sind, wird die universelle Anwendbarkeit wegen Beschränkung an lineare Differentialgleichungen ausgeschlossen. Auch Konstruktionsmöglichkeiten des elektromagnetischen Feldes beschränken die Anwendbarkeit der Laplace-Transformation.

JEDAN DOKAZ PTOLEMEJEVOG PRAVILA

Vojislav Popović, Beograd

Prava povučena kroz D paralelno dijagonali e siječe krug u D_1. Trougli ACD i ACD_1 su obrnuto podudarni, pa je $\overline{CD_1} = c$, $\overline{AD_1} = b$, $\sphericalangle ACD_1 = \beta$.

Dalje je: $\vartheta = \alpha + \beta$, kao spoljašnji ugao trougla AQD; $\sphericalangle BCA = \alpha$, kao periferijski uglovi nad stranom d. Dakle, $\sphericalangle BCD_1 = \alpha + \beta = \vartheta$, pa je $\sphericalangle BAD_1 = \pi - \vartheta$, kao suprotan ugao istog tetivnog četvorougla.



Površina četvorougla $ABCD$ je $\frac{1}{2}\, ef \sin\vartheta$; površina četvorougla $ABCD_1$ je zbir od površine trougla BCD_1, koja je $\frac{1}{2}\, ac \sin\vartheta$, i površine trougla BAD_1, koja iznosi $\frac{1}{2}\, bd \sin(\pi - \vartheta)$. Kako oba četvorougla imaju jednake površine, to je:

$$\frac{1}{2}\, ef \sin\vartheta = \frac{1}{2}\, ac \sin\vartheta + \frac{1}{2}\, bd \sin(\pi - \vartheta).$$

Dakle

$$ef = ac + bd$$

(Primljeno 6. III. 1951.)

BEWEIS DES SATZES VON PTOLEMAIOS

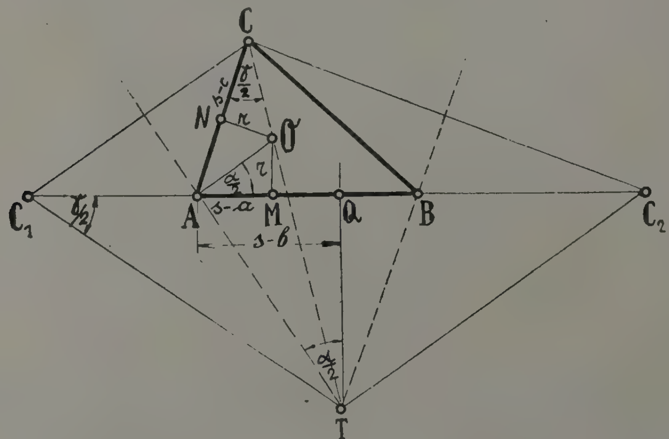
Kurzer trigonometrischer Beweis des Satzes von Ptolemaios.

DOKAZ HERONOVOG OBRASCA

Vojislav Popović, Beograd

Povodom dokaza Heronovog obrasca od dr. Danila Blanuše u prošlom godištu ovog lista, izneću jedan kratak, planimetrijski dokaz istog stava.

Kad je O centar upisanog kruga trougla ABC, onda je $\overline{OM} = \overline{ON} = r$, $\overline{AM} = s - a$, $\overline{CN} = s - c$; ako je $\overline{C_1A} = \overline{AC} = b$, $\overline{BC_2} = \overline{CB} = a$, onda je $\overline{C_1C_2} = 2s$; a ako je Q sredina duži $\overline{C_1C_2}$, onda je $\overline{C_1Q} = s$, $\overline{AQ} = s - b$. Pored toga je $\sphericalangle ATQ = \sphericalangle OAM = \frac{\alpha}{2}$, jer je $\overline{AO} \perp \overline{AT}$, i $\sphericalangle QC_1T = \sphericalangle OCN = \frac{\gamma}{2}$.



Trougli CAC_1 i CBC_2 ravnokraki su, pa su simetrale strana $\overline{CC_1}$ i $\overline{CC_2}$ istovremeno i simetrale uglova C_1AC i CBC_2. Stoga se tačka T, centar opisanog kruga trougla CC_1C_2, nalazi na preseku simetrala dva spoljašna ugla trougla ABC; zbog toga se tačka T nalazi i na simetrali unutrašnjeg ugla u C.

Iz sličnih trouglova QAT i AMO je:

$$(s-b) : \overline{QT} = r : (s-a)$$

a iz sličnih trouglova QC_1T i CNO:

$$\overline{QT} : s = r : (s-c)$$

Množenjem ovih jednačina dobijamo:

$$\frac{s-b}{s} = \frac{r^2}{(s-a)\,(s-c)}$$

a odavde

$$r^2 s = (s-a)\,(s-b)\,(s-c).$$

Kad obe strane pomnožimo sa s, a s obzirom da je $rs = P$, dobijamo

$$P = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\,.$$

(Primljeno 6. III. 1951.)

BEWEIS DES SATZES VON HERON

Kurzer planimetrischer Beweis des Satzes von Heron.

Dr. Mladen Paić

FIZIČKA MJERENJA I. i II. DIO

Zagreb, Školska knjiga, 1948., 160 str. i 1951., 220 str.

Knjiga »Fizička mjerenja« namijenjena je uglavnom studentima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Novi nastavni plan posvećuje naime veliku pažnju ne samo teoretskoj naobrazbi studenata fizike, nego im se omogućuje u širokoj mjeri samostalan eksperimentalan rad.

Obazret ćemo se najprije ukratko na sadržaj knjige. U uvodu prvog dijela dan je kratak pregled računa pogrešaka, upute u način računanja i savjeti za izvođenje mjerenja. Važnost, koja se kod pojedinih mjerenja polaže na račun pogrešaka, vrlo je dobra, jer vodi do kritičkog promatranja mogućnosti mjerenja raznim instrumentima i do kritičkog promatranja individualnih pogrešaka mjerenja.

Plan knjige je dobro postavljen. Svaka knjiga sadrži mjerenja iz mehanike, akustike, optike, kalorike i elektriciteta. U prvom dijelu knjige opisana su najprije temeljna mjerenja, kao rad s pomičnom mjerkom, mikrometarskim mikroskopom, sferometrom, analitičkom vagom i t. d., koja daju solidan temelj za dalji rad. Prvi dio sadrži 16 mjerenja iz mehanike, 13 iz optike, 8 iz kalorike i 2 iz elektriciteta. Drugi dio sadrži 8 mjerenja iz mehanike, 4 iz akustike, 9 iz optike, 8 iz kalorike i 23 iz elektriciteta.

Knjiga se razlikuje od ostalih priručnika ove vrste, što autor ne daje samo upute za izvršenje pojedinih mjerenja, nego i potrebne teoretske osnove. To je osobito važno, jer se tom knjigom služe i studenti prve godine, koji nemaju dovoljno predznanja za samostalan rad, te na taj način dobivaju podstrek, da se pobliže bave problemom, koji imaju obraditi.

Kako autor sam ističe u predgovoru prvog dijela, te kako se i vidi iz sheme aparata, pojedina su mjerenja složena sa što jednostavnijim sredstvima. Time postaje eksperiment mnogo očigledniji, a postoji mogućnost da fizičari sami improviziraju aparate.

Bilo bi poželjno, da se obje knjige, kao i III. dio, koji će tokom ove godine izaći, spoje u jednu cjelinu. Time bi se izbjegle neke nejednakosti u crtežima i stilu.

Kako smo već istakli, knjiga je uglavnom namijenjena studentima. No držim, da ona daleko prelazi taj cilj. Gradivo obuhvaća tako široko područje, da će knjiga dobro poslužiti mnogim naučnim radnicima i stručnjacima kod ispitivanja raznih problema. Pojedina mjerenja prikazana su često na više načina (na pr. napetost površine, viskoznost i t. d.), što dozvoljava zaista sve mogućnosti rada.

Knjiga, pisana jasnim i preciznim stilom, te ilustrirana velikim brojem slika i shema, prva je te vrste na našem jeziku, te je značajan doprinos našoj stručnoj literaturi.

Milena Varićak

GEOFIZIČKI INSTITUT U ZAGREBU

1. XII. 1861. — 1. XII. 1951.

Nedavno se navršilo devedeset godina, otkada je ovom našem institutu za fiziku Zemlje udaren temelj time, što je u zgradi Grič 3, gdje se institut i danas nalazi, osnovan Meteorološki opservatorij. Od onoga dana ova ustanova radi bez ijednog dana prekida. U tom razdoblju, u kojem su prohujala dva svjetska rata, institut je više puta mijenjao ime i djelokrug, ali se njegova razvojna linija nije lomila, iako prilike, u kojima se razvijao, u najvećem dijelu njegova životnoga puta nijesu bile povoljne, često upravo krajnje nepovoljne.

»Kad dođe proljeće, ljubice ne niču samo na jednom mjestu«, pa tako ni osnivanje Meteorološkog opservatorija u Zagrebu nije izolirana pojava; ona pada u vrijeme kad su sve države počele izgrađivati državne mreže meteoroloških stanica. Iako je već g. 1842. ukazano na mogućnosti, koje su za ispitivanje atmosferskih pojava stvorene izumom telegrafa, pa je već na svjetskoj izložbi u Londonu g. 1851., kao izložbeni objekat, funkcioniralo telegrafsko obavještavanje o vremenu, ipak je istom poslije krimskog rata 1854., povodom uništenja francuske ratne lađe u Crnom moru olujom, koja se, da je bilo meteorološke službe, mogla predvidjeti, došlo do organizacije meteorološke službe najprije u Francuskoj, a onda u drugim zemljama. U Zagrebu dao je prvi poticaj, da se pokrenu meteorološka motrenja, već g. 1849. financijski savjetnik Daniel pl. Stanisavljević, meteorolog-amater. Kasnije su se toga zadatka prihvatili profesori fizike, pa je, — nakon što je već započeti niz motrenja bio prekinut — konačno prof. *Ivan Stožir* uspio da stvori trajnu ustanovu, koju je lično vodio 30 godina.

Stožirovo razdobije obilježeno je uglavnom izgradnjom opservatorijskih metoda, uvode se autografi, utvrđuju metode kritične obrade motrenja; pored toga na kraju ovog razdoblja počinje osnivanje daljnjih stanica i publiciranje rezultata rada. God. 1891. preuzima upravu opservatorija prof. dr. *Andrija Mohorovičić*, koji ostaje opet 30 godina na čelu ove ustanove. Mohorovičićeva je zasluga, što je izgradio hrvatsko-slavonsku meteorološku mrežu, a opservatorij podigao na centralni zavod te mreže, koji se ubrzo emancipirao od mađarske meteorološke službe. G. 1911. ustanova dobije ime »Zemaljski zavod za meteorologiju i geodinamiku«. Tim je imenom utvrđeno stvarno proširenje djelokruga na geodinamiku. Mohorovičić razvija na zavodu seizmologiju na fizikalnoj osnovi, g. 1908. i 1909. postavljaju se savremeni seizmografi, a Mohorovičićeva glasovita seizmološka istraživanja utiru ovoj nauci nove putove. Zajedno sa mikroseizmikom na zavodu je osnovana služba točnoga vremena, koja se do danas vrši za interne svrhe i za javne ustanove (poštu, željeznicu, radiostanicu). Daljnje proširenje djelokruga je geomagnetski rad: god. 1915. i 1916. izvršen je geomagnetski premjer Hrvatske i Slavonije. Na institutu su kasnije izrađene i izdane (1928.) magnetske karte Jugoslavije, te je institut postao i do danas ostao centar toga pravca geofizičkog istraživanja.

U Mohorovičićevu razdoblju publikacije instituta znatno se pojačavaju izdavanjem godišnjaka u četiri dijela i seizmološkog bulletina. Nažalost je seriju godišnjaka prekinuo prvi svjetski rat.

Poslije prvog svjetskog rata pri reorganizaciji instituta novim se imenom »Geofizički zavod« ističe široka zadaća instituta, da se bavi proučavanjem svih triju sfera Zemlje. Stvarno je između dva svjetska rata djelokrug instituta proširen i na hidrosferu time, što je osnivanjem mareografske stanice u Bakru (1929.) započeo studij plime i oseke i drugih gibanja Jadranskog mora, i prigodimice je zahvaćeno i u probleme kontinentalne hidrologije.

Nakon prvog svjetskog rata razvitkom avijacije i radiotehnike, radovima norveške škole, dalje razvitkom primjenjene geofizike, nastaje nagao i velik uspon svih grana geofizike. Kao brojne kontinentalne geofizičke, naročito meteorološke ustanove, zagrebački institut nije bio u mogućnosti, da se instrumentalnom izgradnjom i povećanjem naučnih kadrova adekvatno uskladi s razvojem geofizike. Potrebi, da se u staroj Jugoslaviji organizira meteorologija, uza sva nastojanja baš ovoga zavoda, nije udovoljeno. Organizirana je bila samo vojnička operativna meteorološka služba, koja je, prirodno, imala u vidu samo neposrednu praktičnu potrebu. Civilne naučne ustanove su budžetski samo životarile. U ovom trećem razdoblju upravlja kroz 22 godine institutom prof. dr. *Stjepan Škreb.* Uza sve poteškoće ipak se institut razvija i u tom razdoblju, mreža se izgrađuje kvantitativno brojem stanica, a naročito kvalitativno, te je postala neosporno daleko najboljom u Jugoslaviji. Razvija se plodna suradnja sa poljoprivredom i šumarstvom, sa zdravstvom i sa raznim granama tehnike. Pokreću se specijalna terenska istraživanja, prikupljaju naučni kadrovi, postavlja se (1932.) vertikalni seizmograf. Uz seizmički bulletin počinje da izlazi i mjesečni meteorološki bulletin, koji i danas izlazi. U ovom razdoblju, g. 1937. osnovana je na Filozofskom fakultetu katedra za geofiziku.

Poslije drugog svjetskog rata u novoj Jugoslaviji, gdje je planska privreda imperativno tražila razvoj geofizike, stvorena je organizacija Hidrometeorološke službe FNRJ. U nju je ušla i meteorološka mreža NR Hrvatske, koja je pod upravom hidrometeorološke službe NRH u Zagrebu. Geofizički zavod je nakon toga kao ustanova sa naučno-istraživačkim i nastavnim zadacima 1. IV. 1951. priključena Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, gdje geofizika sa meteorologijom sačinjava posebnu struku u matematičko-fizičkom odsjeku.

Pored redovnih institutskih publikacija, kojima se stavljaju nauci i praksi na raspolaganje egzaktno utvrđeni meteorološki, klimatološki i seizmološki podaci, iz instituta su izašli brojni naučni radovi, koji su publicirani u Jugoslavenskoj Akademiji znanosti i umjetnosti, te u inozemnim i domaćim stručnim časopisima. Institut sam izdaje naučnu publikaciju »Rad Geofizičkog instituta«. Od ove publikacije izašla su poslije oslobođenja 3 sveska rasprava.

Naučni rad Geofizičkog instituta dao je znatan doprinos upoznavanju fizičkih prilika u Jugoslaviji; naročito su fundamentalni radovi u području klimatologije, seizmologije i geomagnetizma. Naučni rad na ovom institutu dao je međutim i metode i rezultate od opće vrijednosti, koji su ušli u inozemnu naučnu literaturu, te se citiraju i primjenjuju. Osim već spomenutih seizmoloških radova Andrije Mohorovičića, takve su metode i rezultate dali i radovi u području meteorologije i klimatologije i fizičke oceanografije.

U novo razdoblje svoga rada ulazi Geofizički institut sa znatnom naučnom baštinom i živom tradicijom egzaktnih naučnih metoda. Vrijedan dio baštine je arhiv meteoroloških motrenja od 9 decenija, seizmički od gotovo 5 decenija. Kao važno pomagalo naučnog rada treba istaći biblioteku instituta, koja je sa svojih oko 20.000 svezaka sigurno jedna od najvećih stručnih biblioteka u Jugoslaviji. Ova se biblioteka stalno povećava ne samo nabavama knjiga i časopisa, nego naročito bogatom razmjenom publikacija sa oko 250 geofizičkih ustanova svih pet kontinenata. Po svom sastavu, a u novom organizacionom položaju na fakultetu, ima Geofizički institut sve uvjete za povoljan daljnji razvitak.

J. G.

IZ DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

ODRŽANI KOLOKVIJI

29) 7. XI. 1951. *Dr. V. Niče: Konstrukcija kubne čunjosječnice iz konjugirano imaginarnih točaka*

Kad je kubna čunjosječnica zadana s 6 točaka, od kojih su barem dvije realne, moguće ju je konstruirati kao prodor dvaju stožaca 2. reda sa zajedničkom izvodnicom. Ako su svih šest točaka u parovima konjugirano imaginarne, onda taj postupak zakazuje. U ovakvom slučaju postavimo tim točkama tri valjka 2. reda kojih su izvodnice usporedne s po jednim nosiocem konjugirano imaginarnog para tih točaka. Ta tri valjka imaju zajedničkih osam asociiranih točaka, unutar kojih su i onih šest zadanih. Po dva takva valjka sijeku se u jednoj prostornoj krivulji 4. reda. Uzmemo li takve dvije krivulje, pa potražimo sve one njihove bisekante, koje sijeku realnu spojnicu onog dobivenog četvrtog para točaka unutar osam asociiranih, a koja je također bisekanta tih krivulja, onda sve takve bisekante jedne i druge krivulje čine po jednu pravčastu plohu 2. reda, kojima je spojnica onog četvrtog para zajednička izvodnica. Prodorna krivulja ovih dviju ploha je tražena kubna čunjosječnica.

30) **14. XI. 1951. Stručno-pedagoško veče:**
Prof. V. Jirasek: O simbolici u matematici

31) 21. XI. 1951. *M. Pierre Thionet (stručnjak Ujedinjenih Naroda za statističku reprezentativnu metodu): Les applications modernes de la methode de sondage.*

Predavač je prikazao historijat razvoja primjene statističke reprezentativne metode počev od Bernoulli-a, te se zaustavio na pojmovima, koji su osnovni za modernu primjenu te metode. Pokazao je tehniku rada kad se jedinice odabiranja uzimaju u uzorak sa vjerojatnostima, koje su proporcionalne njihovoj veličini, dao je kratki prikaz korisnosti stratificiranja, te je prešao na višeetapne uzorke. Uporedio je sisteme ocjenjivanja parametara osnovnog skupa u slučaju da su primarne jedinice odabirane sa jednakim i nejednakim vjerojatnostima, te je prikazao, da u potonjem slučaju često dobivamo znatno manju varijancu sredina ili proporcija uzoraka, a time i veću preciznost uz jednake troškove. U izvođenju služio se je svojim proširenjem tehnike, koju je uveo Cornfield.

32) 28. XI. 1951. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:

a) *Prof. L. Rajčić: Neke napomene u vezi s apsolutnom dužinom u geometriji Lobačevskog;*
b) *Prof. S. Škreblin: Izvod nekih trigonometrijskih formula;*
c) *V. Devidé: Još jedan dokaz Heronove formule.*

33) 5. XII. 1951. *Ing. A. Lahodny i Ing. S. Težak: Semimikroradiografija metalnih i nemetalnih sistema*

Izneseni su osnovni principi radiografije, bit i prednosti povećanih radiografija s naročitim osvrtom na područje semimikroradiografije, koju je uveo prof. dr. M. Paić. Referirano je o radovima predavača s toga područja izvršenih u Fizičkom institutu, o postignutim poboljšanjima i pojednostavljenjima metode, te o novim područjima primjene. Predavač je upozorio na mogućnost povezivanja semimikroradiografije s optičkom mikrografijom i metodom po Debye-Schereru i prikazao brojne primjene metode na područje lakih metala i mineralne sisteme.

34) 12. XII. 1951. Stručno-pedagoško veče:
Demonstracija aparata, koje su izradili studenti fizike na Prir.-mat. fakultetu

35) 19. XII. 1951. *Dr. L. Randić: Uspjesi radioastronomije,* I.

Najprije je iznesen historijat radioastronomije i njenog razvitka do rata. Može se govoriti o dvije grane radioastronomije: 1) o izučavanju astronomskih objekata primjenom radarske tehnike i 2) o izučavanju radiozračenja sa objekata u svemiru. Primjenom radara uspjelo je dobiti jeku s Mjeseca, ali do sada ta ispitivanja nisu dala znatnije rezultate, dok su izučavanja meteora bila mnogo uspješnija. Osim daljine, koja se određuje jekom, izložen je u kratkim crtama način određivanja položaja radijanta meteorskog roja, kao i metode određivanja brzine pojedinih meteora. Nadalje uspjelo je riješiti problem sporadičnih meteora, za koje je utvrđeno, da spadaju u Sunčev sistem. Poteškoće još zadaje objašnjenje trajanja ionizacije dulje od jedne minute kao i fluktuacije u intenzitetu odjeka.

36) 26. XII. 1951. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:

a) *Dr. Đ. Kurepa: O najnovijim ispisivanjima brojaka;*
b) *Prof. S. Škreblin: O računanju na prste.*
c) *Ing. J. Ećimović: Primjena odabiranja primarnih jedinica s nejednakim vjerojatnostima kod višeetapnih uzoraka.*

NEKA GOSTOVANJA U ZAGREBU I INOZEMSTVU

Kao gosti Prirodoslovno-matematičkog fakulteta predavali su u Zagrebu po redu L. Schwartz, profesor u Nancy-u, T. Pejović, profesor u Beogradu i A. Denjoy, profesor u Parizu.

L. Schwartz je u 5 predavanja od 29. III.—3. IV. 1951. izložio u glavnim crtama o svojim »distribucijama« — matematičkim objektima, nosiocima pojedinih svojstava i veza, koji su prije bili nedovoljno obrazloženi, ma da su susretani u pojedinim primjenama u fizici, geofizici i sl. Za taj rad dobio je i međunarodnu nagradu.

T. Pejović u vremenu od 29. V.—2. VI. održao je 5 predavanja o diferencijalnim jednadžbama, napose o asimptotskim problemima i primjenama u biologiji; od toga predavanje »Diferencijalne jednačine i biologija« održano je u Matematičkoj sekciji Jugoslavenske Akademije.

A. Denjoy održao je od 23. XI.—26. XI. tri predavanja i to: 23. XI.: Integral od Leibniza do Lebesque-a, 24. XI.: Karakteristike diferencijalnih jednadžbi na površini torusa (predavao u Jugoslavenskoj Akademiji) i 26. XI.: O transfinitnim brojevima. U posljednjem predavanju izložio je s rijetko viđenim uživljavanjem i svoje rješenje vjekovnog problema o integraciji derivacija. Na pretposljednjem predavanju izložio je svoje rješenje poznatog Poincaréova problema o stabilitetu na torusu.

K tome je za vrijeme svojeg boravka u Jugoslaviji kao izaslanik UNESCO-a održao 21. XI. 1951. na kolokviju Društva matematičara i fizičara Pierre Thionet predavanje o novim primjenama metode uzoraka.

Od naših stručnjaka držao je Đ. Kurepa predavanje na Faculté des Sciences u Lausanne-i 22. I. 1951. na povratku iz U. S. A., gdje je održao predavanja na fakultetima u ovim mjestima: Cambridge, Mass., 27. IX. 1950., Detroit 30. X.; Ann Arbor 31. X.; Lafayette, Ind. 14—15. X.; Berkeley (San Francisco) 24. XI., Los Angeles 1. XII., Stillwater. Okla. 8. XII. 1950. Predavao je o svojim istraživanjima iz pojedinih dijelova teorije skupova.

PRIMLJENE PUBLIKACIJE

Časopisi:

1. Abhandlungen des Meteorologischen Dienstes der D. D. R. n. 8 (1951),
2. Acta Mathematica B. 86, n. 1—2 (1951),
3. American Journal of Physics, V. 19, n. 8 (1951), New York,
4. Annales de l'ACFAS, V. 17 (1951), Montreal,
5. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T. LX, f. 1, 2, 3, 4 (1940-46); T. LXI, f. 1, 2, 3 (1947); T. LXII, f. 1, 2, 3 (1948), T. LXIII, f. 1, 2, 3 (1949); T. LXIV, f. 1—2, 3 (1950),
6. Annali di Geofisica, V. IV, n. 3 (1951), Roma,
7. Annals of Mathematics, V. 47, n. 1 (1946); V. 54, n. 3 (1951), Princeton,
8. Annuario della Societá Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, 1950, 1951, Napoli,
9. Archimedes, H. 6 (1951),
10. Atti dell'Accademia delle Scienze di Ferrara, V. 23, f. 1, 2 (1946); V. 24, f. 1, 2 (1947); V. 25, f. 1, 2 (1948); V. 26, f. 1, 2 (1949); V. 27 (1950),

11. Bedrijf en Techniek, jaarg. 6, n. 136, 137, 138, 139 (1951), Amsterdam,
12. Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Ak. der Wissenschaften zu Leipzig, B. 98, H. 1, 3 (1951), B. 99, H. 1 (1951),
13. Canadian Journal of Mathematics, V. III, n. 4 (1951), Toronto,
14. Commentationes Physico-Mathematicae, Soc. Scient. Fennica, T. VII, n. 1—6, 7—14 (1933-34); T. VIII, n. 1—12 (1935); T. IX, n. 1—10, 11—17 (1937-38); T. X, n. 1—5, 6—18 (1938-40); T. XI, n. 10—15 (1943); T. XII (1944); T. XIII, n. 1—17 (1948); T. XIV (1950), Helsingfors.
16. Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, B. 26, n. 13 (1951), København,
17. Journal of Mathematics and Physics. V. XXX, n. 1, 2 (1951), Cambridge USA,
18. Journal of the British Interplanetary Society, V. 10, n. 6 (1951);
19. Journal of the Franklin Institute, V. 251, n. 1, 2, 3, 4, 5, 6 (1951), V. 252, n. 1, 2, 3, 4 (1951),
20. Journal of the Mathematical Society of Japan, V. 3, n. 1 (1951), Tokyo,
21. La Ricerca Scientifica, anno 21, n. 10, 11 (1951), Roma,
22. Le Matematiche, anno 1951-VI, Catania,
23. Matematičko fizički list, II, n. 1 (1951-52),
24. Mathematical Reviews, V. 12, n. 9 (1951),
25. Mathematicae Notae, año XI, f. 1—2 (1951), Rosario,
26. Neue Physikalische Blätter, H. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (1946),
27. Physikalische Blâtter, Jahrg. 3, H. 1—12 (1947); Jahrg. 4, H. 1—12 (1948), Jahrg. 5, H. 1—12 (1949), Jahrg. 6, H. 1—12 (1950), Jahrg. 7, H. 1—11 (1951), Mosbach,
28. Progress of Theoretical Physics, V. 3, n. 1—2 (1948), V. 6, n. 4 (1951), Kyoto,
29. Publications of the Dominion Observatory, V. VII, n. 10; V. X; V. XI, n. 8, 9, 10; V. XIV, n. 8; V. XVI, n. 1 (1950-51), Ottawa,
30. Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche, V. XVI (1949); V. XVII (1950), Napoli,
31. Research, a Journal of Science and its Applications, V. 4, n. 5 (1951), London,
32. Revista, V. 7, n. 1 (1949), Tucumàn,
33. Revue d'optique, T. 30, n. 10, 11 (1951), Paris,
34. Science, Amer. Assoc. for the Advancement of Science, V. 114, n. 2953 (1951),
35. Siemens Austria — Zeitschrift, Jahrg. 1, H. 1, 2 (1949), Jahrg. 2, H. 2 (1950), Jahrg. 3, H. 1, 2 (1951), Wien,
36. Simon Stevin, n. 3 (1950-51), Gent,
37. The Mathematical Gazette, V. XXXV, n. 313 (1951), London,
38. University of California Publications in Mathematics, V. 1, n. 8 (1951),
39. Zeitschrift für Physik, B. 130, H. 4 (1951).

Knjige:

1. Annual Report of the British Interplanetary Society, 1951, London,
2. Ing. J. Ećimović: Osnovi statističke reprezentativne metode, 1951, Beograd.

RJEŠENJA ZADATAKA 139, 141, 142, 152*

139. Dokaži, da je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x\, dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \qquad (-1 < \alpha < 1),$$

Zadatak dostavio D. Blanuša, Zagreb. Riješili: K. Milošević, Skoplje, Č. Stanojević, Beograd, I. Bandić, Beograd.

Č. Stanojević i I. Bandić svode integral na Eulerov integral 1. vrste. Njihov je dokaz u bitnosti ovaj.

Supstitucijom

$$\xi = \sin^2 x$$

izlazi za Eulerov integral 1. vrste

$$B(p, q) = \int_0^1 \xi^{p-1} (1-\xi)^{q-1}\, d\xi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x\, dx.$$

Za

$$2p - 1 = \alpha, \quad 2q - 1 = -\alpha,$$

t. j.

$$p = \frac{1+\alpha}{2}, \quad q = \frac{1-\alpha}{2}$$

izlazi dakle za traženi integral I

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{1+\alpha}{2}, \ \frac{1-\alpha}{2}\right)$$

ili, zbog

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{I\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

No u drugu ruku je

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad (0 < p < 1),$$

što daje, u skladu s propisanim uvjetom za α,

$$I = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi(1+\alpha)}{2}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}},$$

čime je dokaz izvršen.

K. Milošević rješava integral integracijom u kompleksnom području. Supstitucija

$$\operatorname{tg} x = \varrho$$

daje

$$I = \int_0^\infty \frac{\varrho^a \, d\alpha}{1+\varrho^2} .$$

Računa se sada integral

$$\int_C \frac{z^a \, dz}{1+z^2} ,$$

gdje je krivulja C kontura kružnoga poluprstena omeđenog polukružnicama polumjera r odnosno R i dijelovima osi realnih brojeva. Integral se može izraziti pomoću ostatka (residuuma) integranda za $z = i$, pa granični prijelaz $r \to 0$ i $R \to \infty$ s obzirom na propisani uvjet za a vodi do rezultata.

141. Dokaži, da je geometrijsko mjesto točaka na kugli, za koje je zbroj sfernih udaljenosti od dviju čvrstih točaka kugline plohe konstantan, sferni čunjosjek, t. j. spojnice središta kugle s točkama te krivulje čine čunj drugoga reda.

Zadatak je dostavio D. Blanuša, Zagreb. Riješio ga je D. Skoko, stud., Zagreb.

Skoko uzima polumjer kugle jednak 1 i specijalizira koordinate čvrstih točaka F_1 i F_2. Mi ćemo nešto općenitije uzeti, da je R polumjer kugle i da su x_1, y_1, z_1 komponente radij-vektora $\mathbf{f}_1$ točke F_1, a x_2, y_2, z_2 komponente radij-vektora $\mathbf{f}_2$, t. j. ujedno koordinate točke F_2. Ako je $\mathbf{r}$ radij-vektor pomične točke $T(x, y, z)$ na kugli, zatim $\varphi_1 = \sphericalangle F_1OT$, $\varphi_2 = \sphericalangle F_2OT$, to zahtjev

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varrho ,$$

gdje bi $2R\varrho$ bio zadani zbroj sfernih udaljenosti, daje

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos 2\varrho$$

ili

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos 2\varrho$$

i, kvadrirano,

$$(1 - \cos^2\varphi_1)(1 - \cos^2\varphi_2) = \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2 - 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos 2\varrho + \cos^2 2\varrho .$$

Dalje se to svodi na oblik

$$1 - \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 = -2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos 2\varrho + \cos^2 2\varrho$$

ili

$$\sin^2 2\varrho = \cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 - 2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos 2\varrho .$$

No očito su nutarnji produkti

$$(\mathbf{f}_1\,\mathbf{r}) = R_1 R \cos\varphi_1, \qquad (\mathbf{f}_2\,\mathbf{r}) = R_2 R \cos\varphi_2,$$

gdje smo sa R_1, R_2 označili duljine vektora $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$. Te su duljine dakako jednake R, ali ćemo ih ipak razlikovati od duljine R pomičnog vektora $\mathbf{r}$.

Izlazi dakle

$$R_1^2 R_2^2 R^2 \sin^2 2\varrho = R_2^2 (\mathbf{f}_1\,\mathbf{r})^2 + R_1^2 (\mathbf{f}_2\,\mathbf{r})^2 - 2 R_1 R_2 (\mathbf{f}_1\,\mathbf{r})(\mathbf{f}_2\,\mathbf{r}) \cos 2\varrho.$$

Za komponente x, y, z vektora $\mathbf{r}$ vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

a nutarnji produkti su

$$(\mathbf{f}_1\,\mathbf{r}) = x_1 x + y_1 y + z_1 z, \quad (\mathbf{f}_2\,\mathbf{r}) = x_2 x + y_2 y + z_2 z.$$

Uvrštenje daje

$$\begin{aligned} R_1^2 R_2^2 (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 2\varrho = \\ = R_2^2 (x_1 x + y_1 y + z_1 z)^2 + R_1^2 (x_2 x + y_2 y + z_2 z)^2 - \\ - 2 R_1 R_2 (x_1 x + y_1 y + z_1 z)(x_2 x + y_2 y + z_2 z) \cos 2\varrho. \end{aligned}$$

Ta je jednadžba homogena 2. stupnja s obzirom na varijable x, y, z, pa stoga predočuje čunj 2. reda s vrhom u ishodištu. Koordinate pomične točke na kugli zadovoljavaju tu jednadžbu, pa je time dokaz proveden.

Uzmemo li kao Skoko $R_1 = R_2 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = -\sin\varepsilon$, $y_2 = \sin\varepsilon$, $z_1 = z_2 = \cos\varepsilon$, izlazi lako

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 2\varrho = 2 (y^2 \sin^2\varepsilon + z^2 \cos^2\varepsilon) + \\ + 2 (y^2 \sin^2\varepsilon - z^2 \cos^2\varepsilon) \cos 2\varrho \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} 4 (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2\varrho \cos^2\varrho = 2 y^2 \sin^2\varepsilon\, (1 + \cos 2\varrho) + \\ + 2 z^2 \cos^2\varepsilon\, (1 - \cos 2\varrho) \end{aligned}$$

i dalje, diobom sa $4 \cos^2\varrho \cos^2\varepsilon$,

$$(x^2 + y^2 + z^2) \frac{\sin^2\varrho}{\cos^2\varepsilon} = y^2 \operatorname{tg}^2\varepsilon + z^2 \operatorname{tg}^2\varrho.$$

Želimo li odrediti jednadžbu projekcije krivulje na ravninu YZ, treba iz ove jednadžbe čunja i jednadžbe kugle

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

eliminirati x. Izlazi

$$y^2 \operatorname{tg}^2\varepsilon + z^2 \operatorname{tg}^2\varrho = \frac{\sin^2\varrho}{\cos^2\varepsilon}$$

kao jednadžba tražene projekcije. Tu je jednadžbu dobio i Skoko,

142. Neka se ispita konvergencija odnosno divergencija izraza

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, \quad x > 0.$$

Zadatak je s rješenjem dostavio V. Devidé, Zagreb. M. Bajraktarević, Sarajevo riješio je pitanje konvergencije odnosno divergencije nekih općenitijih nizova, koji kao specijalni slučaj obuhvataju i postavljeni zadatak. (Vidi članak M. Bajraktarević: *O konvergenciji niza* (x_n) *čiji su članovi definisani jednačinom* $\cdot x_{n+1} = f(x_n)$. Djelomično ispravno riješio je zadatak M. Kugler, Zagreb; on primjećuje da je pravilnije pisati

$$\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^x}}} \text{ nego } x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} .$$

Devidé pokazuje, da osim trivijalnog slučaja $x = 1$, $y(1) = 1$ postoji samo još jedan *racionalni* $x \left(\text{naime } x = \frac{1}{4}\right)$, za koji i izraz $x^{x^{\cdot^{\cdot}}}$ konvergira *racionalnom* broju $y(x)$ $\left(y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\right)$.

152.* Neka su brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni i različiti od jedinice: izračunaj

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \ldots \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_1 .$$

Zadatak je dostavio Đ. Kurepa; riješili su ga O. Muftić, I. Zrnić, M. Lukšić, Z. Blašković, V. Vujnović, R. Vasić-Vukelić, svi iz Zagreba, te M. Živković, Vršac; V. Fatić, Novi Sad i V. Č. Beograd.

Rješenje:

Neka je:

$$(1) \begin{cases} \log_{a_1} a_2 = x_2, & \text{onda je: } a_2 = a_1^{x_2}, \\ \log_{a_2} a_3 = x_3, & a_3 = a_2^{x_3} = a_1^{x_2 x_3}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \log_{a_{n-1}} a_n = x_n, & a_n = a_{n-1}^{x_n} = a_1^{x_2 x_3 \ldots x_n}. \\ \log_{a_n} a_1 = x_1, & a_1 = a_n^{x_1} = a_1^{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}. \quad (2) \end{cases}$$

Iz jednadžbe (2) razabiremo da je

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = 1$$

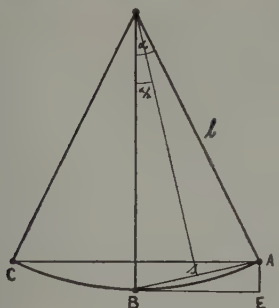
ili, ako se mjesto $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ stave vrijednosti iz (1):

$$\log_{a_n} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n = 1,$$

pa je time zadatak riješen.

ZADACI

157.* Izvedimo formulu za vrijeme jednog njihaja matematičkog njihala ovako:



Ako je amplituda α vrlo malena, možemo gibanje po luku $\widehat{AB}$ zamijeniti sa gibanjem po tetivi $\overline{AB}$ (vidi sliku). To je gibanje po kosini, pa je ubrzanje $a = g \sin \frac{\alpha}{2}$. Budući da je $s = \overline{AB} = 2\, l \sin \frac{\alpha}{2}$, to prema formuli za jednoliko ubrzano gibanje $s = \frac{a}{2}\, t^2$ slijedi $t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$, odnosno vrijeme jednog punog njihaja $T = 4t = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$. No poznato je, da ispravna formula glasi $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Gdje je dakle učinjena pogreška u izvodu?

(Dostavio J. Goldberg)

158. Neka se za jednadžbu $x^y = y^x$, $(x \neq y)$ nađe rješenje u prirodnim brojevima.

(Dostavio B. Stefanini)

159. Neka se konstruira kvadrat, koji je upisan zadanom trapezoidu.

(Dostavio V. Devidé)

SADRŽAJ - СОДЕРЖАНИЕ
TABLES DES MATIERES - CONTENTS

ČLANCI - СТАТЬИ - ARTICLES

RAZNO - PA3HOE - DIVERS - MISCELLANY

IZ DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. H. SOCIÉTÉ DE MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE CROATIE

ZADACI - ЗАДАЧЫ - EXERCISES ET PROBLÈMES

RJEŠENJA - РЕШЕНИЯ - SOLUTIONS

»Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, glasilo Društva matematičara i fizičara N. R. H., izlazi godišnje u pet brojeva po tri štampana arka. Godišnja pretplata iznosi Din 180.—, a može se slati na upravu Hrvatskog prirodoslovnog društva, Ilica 16/III, ili poštanskim čekom Društva matematičara i fizičara Narodne Republike Hrvatske broj 401-9533139. Glavni i odgovorni urednik: Stanko Bilinski: Redakcioni odbor: Danilo Blanuša, Josip Goldberg, Đuro Kurepa, Branimir Marković, Mladen Paić, Ivan Supek, Stjepan Škreblin, Radovan Vernić. Tehnički urednik: Zlatko Janković. — Štamparski zavod »Ognjen Prica«, Zagreb, Savska cesta broj 31.

SARADNICIMA »GLASNIKA«

Članke i dopise treba upućivati *redakciji Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog, Zagreb, Marulićev trg 19.*

Članci neka su jezično korigirani i pisani strojem sa proredom na jednoj strani papira. Uz svaki članak neka je priložen sadržaj na kojem od svjetskih jezika i to približno do jedne trećine opsega članka. Pri tom neka se formule iz članka u sadržaju ne ponavljaju. Zato treba u članku formule numerirati i u sadržaju se na njih pozvati. Glasniku se mogu poslati i članci na kojem stranom svjetskom jeziku. U tom slučaju neka se priloži sadržaj na hrvatskom jeziku. Autori iz inozemstva mogu poslati uz članak i sadržaj na svom jeziku. Taj će sadržaj uredništvo prevesti na hrvatski.

Autori dobivaju 50 separata besplatno.

AUX COLLABORATEURS DU »GLASNIK«

Les collaborateurs sont priés d'adresser les articles et la correspondance à la *rédaction de »Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, Zagreb, Marulićev trg 19.*

Les manuscrits doivent être écrits à la machine avec interligne sur une côté de la feuille. Les formules doivent être numérotées afin d'éviter leur répétition dans le résumé. Les auteurs étrangers sont invités de rédiger le résumé dans leur langue, la rédaction se chargeant de le traduire en croate.

Les auteurs reçoivent à titre gratuit 50 exemplaires de tirages à part.

IZ REDAKCIJE

Rješenja zadataka, koja se šalju »Glasniku«, neka su pisana strojem ili čitljivo rukom na jednoj strani papira i to tako, da se rješenje svakog zadatka nalazi na posebnom papiru. Ako je uz rješenje potrebna slika, treba je nacrtati posebno, po mogućnosti na boljem papiru. Rješenja označena zvjezdicom objavit ćemo već u drugom narednom broju »Glasnika«. Te zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvih semestara. Neka se redakciji šalju i zadaci, ali samo originalni i sa pripadnim rješenjem.

OBAVIJEST

Matematičari, fizičari i svi ostali, koji se zanimate matematičko-fizičkim naukama, učlanite se u Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske.

Prijave poslati zajedno s adresom Hrvatskom prirodoslovnom društvu, Zagreb, Ilica 16/III (za Društvo matematičara i fizičara N. R. H.). Upisninu od Din 20.— i godišnju članarinu od Din 180.— pošaljite čekovnom uplatnicom 401-9533139 (Društvo mat. i fiz. N. R. H., Zagreb). Članovi Društva dobivaju Glasnik besplatno.

Pravila Društva mogu se dobiti besplatno, ako ih zatražite na gornji naslov.

Na Glasnik se mogu pretplatiti i oni, koji nisu članovi Društva. Pretplata iznosi Din 180.— godišnje i šalje se čekovnom uplatnicom.

Molimo članove i pretplatnike da uredno plaćaju članarinu odnosno pretplatu.

Svaku promjenu adrese treba hitno javiti Hrv. prir. društvu.